

BUTLLETÍ

DE LA SOCIETAT CATALANA
DE MATEMÀTIQUES

Institut d'Estudis Catalans

Í n d e x

- ☐ *Álvaro Corral i Francesc Font-Clos*
Processos de ramificació, criticitat i autoorganització: aplicació
als desastres naturals 5
- ☐ *Mercè Romero-Gómez, Patricia Sánchez-Martín i Josep J. Masdemont*
Com les varietats invariants formen espirals i anells en galàxies
barrades 51
- ☐ *Carles Simó*
Aplicacions quadràtiques que preserven l'àrea a $\mathbb{R}^2$ 77
- ☐ English summaries 109
-



Volum 29 • Número 1 • Any 2014



Institut
d'Estudis
Catalans

BUTLLETÍ

DE LA SOCIETAT CATALANA

DE MATEMÀTIQUES

Institut d'Estudis Catalans

Volum 29 • Número 1 • Juny 2014

BARCELONA
2014

© dels autors dels articles

Editat per la Societat Catalana de Matemàtiques
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carrer del Carme, 47
08001 Barcelona

Text revisat lingüísticament
per la Unitat de Correcció del Servei Editorial de l'IEC.

Imprès a Limpergraf, SL
Polígon industrial Can Salvatella
Carrer de Mogoda, 29-31
08210 Barberà del Vallès

ISSN: 0214-316-X
Dipòsit Legal: B. 19272-1987

Són rigorosament prohibides, sense l'autorització escrita dels titulars del *copyright*, la reproducció total o parcial d'aquesta obra per qualsevol procediment i suport, incloent-hi la reprografia i el tractament informàtic, la distribució d'exemplars mitjançant lloguer o préstec comercial, la inclusió total o parcial en bases de dades i la consulta a través de xarxa telemàtica o d'Internet. Les infraccions d'aquests drets estan sotmeses a les sancions establertes per les lleis.

Índex

ÁLVARO CORRAL I FRANCESC FONT-CLOS

Processos de ramificació, criticitat i autoorganització:
aplicació als desastres naturals.....5

MERCÈ ROMERO-GÓMEZ, PATRICIA SÁNCHEZ-MARTÍN I JOSEP J. MASDEMONT

Com les varietats invariants formen espirals i anells en galàxies barrades.....51

CARLES SIMÓ

Aplicacions quadràtiques que preserven l'àrea a $\mathbb{R}^2$77

English summaries.....109

Processos de ramificació, criticitat i autoorganització: aplicació als desastres naturals

ÁLVARO CORRAL I FRANCESC FONT-CLOS

Només els beneïts, els xarlatans i els mentiders prediuen terratrèmols.

C. F. Richter

Resum: L'estadística dels desastres naturals conté molts resultats antiintuitius. Fent servir els terratrèmols com a exemple, mostrarem que l'energia radiada per aquests esdeveniments segueix una distribució de tipus Pareto, és a dir, una llei de potències. Això implica, en teoria, que el valor esperat de l'energia és infinit, i a la pràctica, que la mitjana d'un conjunt finit de dades mai no és representativa del total de la població. A més a més, aquesta distribució presenta invariància d'escala i, per tant, és impossible definir una escala característica per a l'energia. Un model simple capaç de reproduir aquesta peculiar estadística són els anomenats processos de ramificació; per exemple, el lliscament o desplaçament d'un segment de falla pot conduir al desplaçament d'altres segments, amb certa probabilitat. Tot i que inicialment els sismòlegs no n'eren conscients, aquest model és un cas particular del procés estocàstic estudiat per Galton i Watson un segle enrere, en aquell cas per a modelar l'extinció de les famílies (benestants). Obtindrem les propietats principals d'aquests models mitjançant el formalisme de les funcions generatrius de moments. Sorprenentment, la distribució de potència per a l'energia pot recuperar-se tan sols en un cas molt particular: quan el procés de ramificació es troba just entre l'atenuació i la intensificació, és a dir, en la criticitat. Per a donar sentit a aquest fet, introduïrem els models de criticitat autoorganitzada, en els quals mitjançant un mecanisme de retroalimentació l'estat crític esdevé un atractor en l'evolució del sistema. Al llarg del text es mostren algunes analogies amb conceptes bàsics de física estadística. La major part del material és autocontingut, excepte el que té a veure amb coneixements elementals de teoria de probabilitat.

Paraules clau: processos de ramificació, model de Galton-Watson, criticitat, autoorganització, lleis de potències, llei de Gutenberg-Richter.

Classificació MSC2010: 60J80, 60J85.

1 L'estadística dels desastres naturals

Des dels inicis dels temps, la humanitat ha viscut sota l'amenaça dels desastres naturals: inundacions, erupcions volcàniques, tsunamis, terratrèmols, huracans, etc. Es tracta, d'alguna manera, d'una espasa de Dàmocles de la qual, en ple segle XXI, les nostres societats encara no han pogut desfer-se. Ara bé, aquests fenòmens totalment capritxosos són obra de la fúria dels déus, o amaguen potser certes regularitats? La primera visió ha dominat el pensament humà durant molts segles, i fins fa poc no s'ha començat a consolidar una perspectiva més racional.

1.1 La llei de Gutenberg-Richter

Una de les primeres lleis per quantificar l'ocurrència d'un desastre natural va ser proposada pels famosos sismòlegs Beno Gutenberg i Charles F. Richter, cap a l'any 1940, tot aprofitant el desenvolupament recent de la primera escala de magnituds per part del mateix Richter. La llei de Gutenberg-Richter és sorprenentment simple: si comptem el nombre de terratrèmols a qualsevol regió sísmicament activa del món durant un període de temps suficientment llarg, trobarem que per cada 100 terratrèmols de magnitud $M \geq 4$ hi ha, aproximadament (de mitjana), 10 terratrèmols amb $M \geq 5$, 1 terratrèmol amb $M \geq 6$, i així successivament [11, 17]. Per tant, la gran majoria d'esdeveniments són els més petits i, per sort, només una mínima part poden ser devastadors; es manté sempre una proporció constant entre el seu nombre.

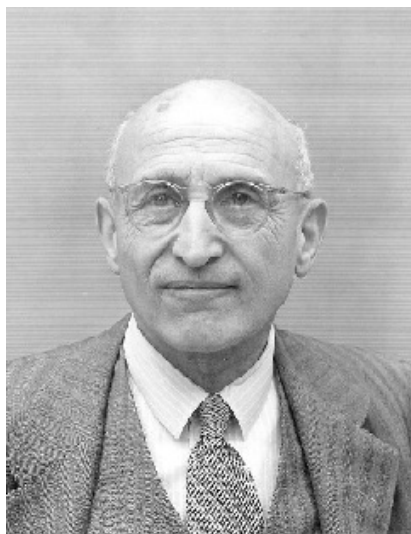
Tot i que no és possible mesurar tots els terratrèmols del planeta, en algunes àrees on l'activitat sísmica es monitoritza amb molta precisió s'ha validat la llei de Gutenberg-Richter fins a la magnitud -4 ; això correspon a petites esquerdes o trencaments en roques de pocs centímetres (les magnituds negatives s'han introduït per a poder treballar amb terratrèmols més petits que els de magnitud 0). I, per si no fos prou, en experiments de nanofractures al laboratori, la llei s'ha validat fins a magnituds inferiors a -13 . Per altra banda, l'escassetat de grans esdeveniments (escassetat que la pròpia llei prediu), impedeix determinar quina és la fita superior de validesa d'aquesta llei.

Tot i que Gutenberg i Richter no ho mencionen en el seu article [11], un estudiant de probabilitat i estadística s'adonarà immediatament que la llei de Gutenberg-Richter implica una distribució exponencial per a la magnitud dels terratrèmols, és a dir,

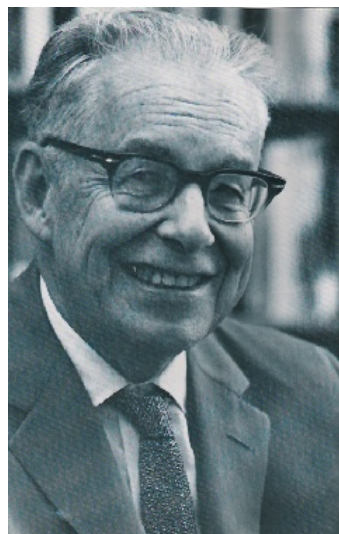
$$D_M(M) \propto 10^{-bM},$$

on $D_M(M)$ és la funció de densitat de M , b és un paràmetre proper a 1 i el símbol $\propto$ indica proporcionalitat; la constant de proporcionalitat es pot determinar amb la condició de normalització de $D_M(M)$.

Només donarem un parell de pistes sobre com es pot deduir la relació anterior: partint del nombre de terratrèmols superiors a una certa magnitud es pot estimar la funció de distribució acumulada complementària, definida com la probabilitat de tenir magnitud més gran o igual que un cert valor M . Com



Beno Gutenberg



Charles Richter

Els sismòlegs Beno Gutenberg i Charles F. Richter
(fotos extretes de seismo.berkeley.edu).

que aquesta magnitud resulta ser exponencial, proporcional a 10^{-bM} , la seva derivada també ho serà, i aquesta és, excepte un signe, la funció de densitat. En equacions,

$$D_M(M) = -\frac{d}{dM}P(\text{magnitud} \geq M) \propto \frac{d10^{-bM}}{dM} \propto 10^{-bM}.$$

Però quin és el significat de la llei de Gutenberg-Richter, a més de proporcionar una regla fàcil de recordar per a les abundàncies relatives dels terratrèmols? La interpretació depèn, òbviament, del sentit del terme *magnitud*, que fins ara hem evitat definir. De fet, la magnitud no és una variable física adequada —al cap i a la fi, no té unitats. Per a aprofundir una mica més, és preferible fixar-se en l'energia E radiada per un terratrèmol, que és una funció exponencial de la seva magnitud [17], és a dir,

$$E \propto 10^{3M/2},$$

de manera que un augment d'1 en la magnitud suposa un augment en energia d'un factor $\sqrt{1000} \simeq 32$. Això significa que un terratrèmol de magnitud 9 radia tanta energia com 1000 terratrèmols de magnitud 7, o 10^6 de magnitud 5.

Ara podem reformular la llei de Gutenberg-Richter en termes de l'energia. De fet, la probabilitat d'un esdeveniment és «independent» de la variable que s'usi per a descriure'l, i per tant, per un senzill canvi de variables,

$$D_E(E) = D_M(M) \frac{dM}{dE},$$

on $D_E(E)$ és la funció de densitat de l'energia. Aquest canvi de variables implica que

$$D_E(E) \propto \frac{1}{E^\alpha},$$

on

$$\alpha = 1 + \frac{2b}{3},$$

i aquesta és la famosa distribució de potències, o distribució de Pareto [22], amb exponent α al voltant d'1.67 quan b és proper a 1. Observeu que perquè $D_E(E)$ sigui realment una funció de densitat cal que estigui definida només per sobre d'un valor mínim d'energia $E_{\min} > 0$ ja que en cas contrari (si $E_{\min} = 0$) no pot normalitzar-se. A la pràctica, aquest valor no es pot mesurar (és massa petit), però això no és un problema, ja que realment no hi ha cap propietat dels terratrèmols que en depengui.

La figura 1 mostra la funció de densitat del moment sísmic per a terratrèmols d'arreu del món [16]; aquesta variable es considera proporcional a l'energia (però és molt més fàcil de mesurar), i per tant també hauria de tenir una distribució de potència amb el mateix exponent. La línia recta és, òbviament, el tret que caracteritza les lleis de potències en escala logarítmica doble, ja que $\log D_E(E) = C - \alpha \log E$.

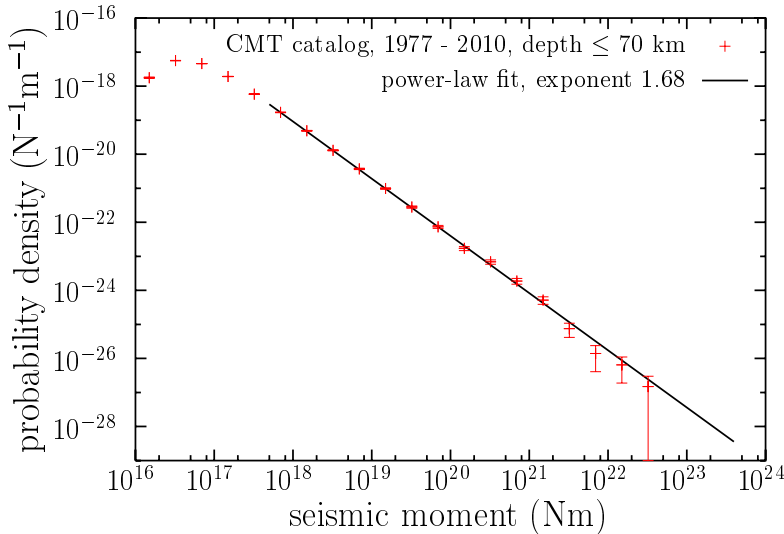


FIGURA 1: Estimació de la funció de densitat del moment sísmic per a terratrèmols superficials d'arreu del món, utilitzant el catàleg conegut per CMT [16]. L'ajustament d'una llei de potències dóna un exponent $\alpha = 1.68$. L'energia radiada hauria de tenir el mateix comportament de llei de potències. Les desviacions per a valors petits del moment sísmic s'atribueixen a la no completesa del catàleg.

1.2 Propietats de les distribucions tipus lleis de potències

Algunes propietats d'aquestes distribucions mereixen atenció especial. D'entrada, podem calcular-ne la mitjana, és a dir, el valor esperat de E , que ve donat per

$$\langle E \rangle = \int_{E_{\min}}^{\infty} E D_E(E) dE.$$

Observeu que denotem el valor esperat per $\langle E \rangle$, tal com fan els físics i no per $E[E]$, com farien els probabilistes. La raó és que estem més interessats en les aplicacions, on la primera opció és la més habitual. Es fàcil comprovar que, en el cas de l'energia dels terratrèmols, aquesta integral divergeix i, per tant, en rigor, el valor esperat de l'energia és infinit. Aquesta divergència és deguda al fet que l'exponent de la llei de potències és més petit que 2. Òbviament l'energia que, de mitjana, radia un terratrèmol no pot ser infinita (al cap i a la fi, la Terra conté una quantitat finita d'energia), per tant hi deu haver algun problema en extrapolar la llei de potències fins a l'infinit. Si tinguéssim una distribució normal, o una exponencial, podríem extrapolar-la fins a l'infinit sense cap por, perquè la integral no divergiria. Però cal remarcar que estem davant d'un problema físic, no matemàtic —si la nostra variable fos, per exemple, el temps d'espera entre esdeveniments, el temps mitjà podria perfectament ser infinit.

Per tant, per raons físiques, ha d'existir una fita superior per a la validesa de la llei de Gutenberg–Richter; però no tenim ni idea del valor d'aquesta fita. A la pràctica, el fet que el valor esperat de l'energia divergeixi implica que les mitjanes de l'energia que es poden calcular usant conjunts finits de dades no convergeixen, sigui quin sigui el nombre de dades. En resum, els sismòlegs ignoren completament quina és l'energia mitjana radiada pels terratrèmols, a causa de les propietats inusuals de les lleis de potències.

Tot i que en començar aquest article hem interpretat positivament el fet que la major part de terratrèmols són petits, i només uns quants són devastadors, la situació certament no és tan favorable. El problema és que els esdeveniments rars i grans, tot i ser molt pocs, són els responsables de la dissipació d'energia en el sistema. Per al valor particular de α que tractem, és fàcil verificar que l'ordre de magnitud més gran que es consideri (la dècada més gran) contribueix més al total que totes les que té per sota juntes. Matemàticament,

$$\int_{E_{\min}}^c E D_E(E) dE < \int_c^{10c} E D_E(E) dE,$$

sigui quin sigui el valor de c . Podeu trobar la demostració a l'apèndix.

Una altra propietat curiosa de les lleis de potències és la invariància d'escala. Per a introduir el concepte de transformació d'escala considerem primer una funció qualsevol que anomenarem $D(E)$. La idea d'una transformació d'escala és mirar la funció $D(E)$ a una altra escala, com si tinguéssim un microscopi matemàtic. Podríem tenir una visió de $D(E)$ a l'escala de metres (si E i $D(E)$ fossin distàncies) i tractar d'esbrinar quin aspecte té a l'escala de centímetres.

Per a fer-ho, utilitzem una transformació d'escala, que denotem amb l'operador T actuant sobre $D(E)$,

$$T(D(E)) = c_2 D(E/c_1),$$

on c_1 i c_2 són els anomenats paràmetres d'escala, responsables de les transformacions lineals en E i D . En el cas de metres-centímetres, per exemple, tindríem $c_1 = c_2 = 100$.

En general, gairebé totes les funcions canvien sota una transformació d'escala; si volem trobar l'excepció, hem de determinar la funció o funcions que compleixen la condició següent:

$$D(E) = c_2 D(E/c_1).$$

És trivial comprovar que la solució és la llei de potències

$$D(E) \propto \frac{1}{E^\alpha}$$

amb α donat per

$$\alpha = -\frac{\ln c_2}{\ln c_1}.$$

És a dir, una llei de potències amb exponent α no canvia sota una transformació d'escala si els factors d'escala mantenen la relació

$$c_2 = \frac{1}{c_1^\alpha}.$$

La figura 2 il·lustra aquesta situació, amb $c_1 = 10$, $c_2 = \sqrt{10}$, i $D(E) = \sqrt{E}$. Cal destacar que la constant de proporcionalitat, que de fet està continguda en el símbol $\propto$, no té cap paper en aquestes relacions.

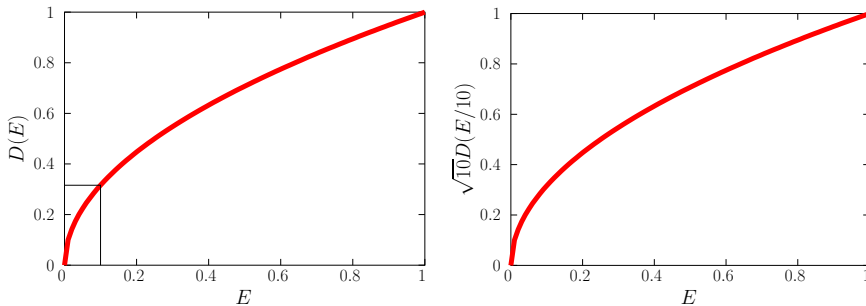


FIGURA 2: Una transformació d'escala actuant sobre la seva corresponent funció amb invariància d'escala. La funció s'expandeix en els factors $c_1 = 10$ i $c_2 = \sqrt{10}$, de tal manera que el petit rectangle de la part esquerra de la figura esdevé la part dreta sencera. La funció en qüestió és $D(E) = \sqrt{E}$.

Encara més, no solament es pot demostrar que la llei de potències és una solució, sinó que és l'única solució vàlida per a tots els valors de c_1 (reals positius) si c_1 i c_2 mantenen la relació anterior [22, 6]. En resum, la condició d'invariància d'escala imposa que

$$D(E) = c_2 D(E/c_1) \text{ per a tots els } c_1 \text{ reals positius}$$

i, aleshores, l'única solució possible és una llei de potències. Es pot verificar que altres solucions, com per exemple $D(E) = \sin(\ln E)$, només funcionen per a uns valors determinats de c_1 i c_2 .

La invariància d'escala és, de fet, la simetria associada a les transformacions d'escala, així com la invariància rotacional és la simetria corresponent a les rotacions. Si tenim invariància d'escala no podem definir una escala característica per a la variable E , de manera anàloga al fet que, si tenim invariància rotacional en un sistema, no el podem fer servir per a senyalar direccions. El sistema on *no* hi ha invariància d'escala permeten definir escales característiques, com per exemple les funcions exponencials que defineixen la desintegració radioactiva, que permeten definir la unitat de temps en termes de la semivida.

De tota manera, cal remarcar un punt important: si $D(E)$ representa una densitat de probabilitat, com en el cas de l'energia radiada pels terratrèmols, aleshores $D(E)$ no pot ser una llei de potències per a tot $E \geq 0$, perquè aleshores no podria normalitzar-se (la integral de 0 a ∞ divergiria). Com ja hem dit, cal introduir una fita inferior de validesa $E_{\min}$ per evitar aquesta situació. A més, també hem vist que la llei no pot estendre's fins a l'infinit per raons físiques. Per tant, la invariància d'escala absoluta no és possible entre les distribucions de probabilitat; només es pot aspirar a una invariància d'escala restringida. Ara bé, com que en el cas dels terratrèmols cap de les fites, la superior i la inferior, no es pot obtenir a partir d'observacions, la invariància d'escala sí que exerceix un paper real.

La invariància d'escala en l'energia dels terratrèmols té conseqüències anti-intuïtives. Imaginem, per exemple, que arribem a un país, i estem preocupats pels terratrèmols. Aleshores decidim acostar-nos a algú i fer-li la pregunta següent: *com són de grans els terratrèmols, aquí?* Tot i que pot semblar una pregunta molt innocent, a causa de la invariància d'escala no es pot definir una escala característica per a l'energia i, per tant, la pregunta no pot tenir resposta.

Per acabar aquesta subsecció volem remarcar que la distribució en llei de potències no és una característica solament dels terratrèmols: s'ha afirmat que molts altres desastres naturals estan distribuïts segons una llei de potències, tot i que l'exponent pot variar: tsunamis [5], esllavissaments i caigudes de roques [19], erupcions volcàniques [21], huracans [8], pluja [27], aurores [9], incendis forestals [20], flamarades solars [3], cràters de meteorits (a la Lluna) [3]...

Tal com el lector ja s'imagina, part del que explicarem a continuació pensant en els terratrèmols també es pot aplicar a alguns d'aquests fenòmens, però potser no a tots. De fet, és un problema obert distingir entre aquests casos. Per a un recull de lleis de potència en altres àmbits, a més de la geociència, recomanem [22].

1.3 Un primer model de generació de terratrèmols

El primer intent que coneixem de desenvolupar un model per als terratrèmols que expliqui la llei de Gutenberg-Richter va ser obra de Michio Otsuka als inicis de la dècada de 1970 [23, 24, 18]. Otsuka utilitzava com a metàfora el joc xinès del go, però nosaltres presentarem el model fent referència al dòmino, que serà més familiar per als lectors (i per als autors!). En lloc de jugar al dòmino de veritat, en farem servir les peces per jugar a un altre joc. Es tracta de veure si les peces, posades dretes, fan caure les unes a les altres, com en els famosos concursos i intents de superar el rècord Guinness, però amb dues diferències substancials. Primer, les peces no es disposen en fila, sinó que formen una espècie d'arbre. Segon, quan una peça cau, no sabem què passarà a continuació, si farà caure alguna altra peça o no, ni quantes. És a dir, que tenim un procés estocàstic en cascada que, en principi, imita les ruptures que tenen lloc a les falles sísmiques durant un terratrèmol. L'arbre de peces de dòmino fa el paper de falla, i cada peça correspon a un petit fragment de falla, o element. El terratrèmol, al seu torn, correspon a la successió de peces que cauen (és a dir, fragments que es trenquen i llisquen).

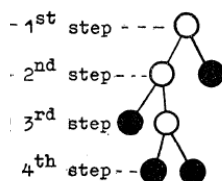


FIGURA 3: Representació esquemàtica del model d'Otsuka per a ruptures en terratrèmols. Els cercles blancs representen la propagació de la ruptura, i els negres indiquen punts terminals [24].

Concretament, Otsuka va suposar que l'arbre que representava la falla tenia un nombre fix de branques a cada posició o node, i que les caigudes es propagaven d'una branca a l'element següent amb una probabilitat fixa, independentment de qualsevol altra variable. Per exemple, en la figura 3 el nombre de branques per element és 2. Així, el nombre total de postcaigudes o ramificacions originades per un sol element seguiria una distribució binomial [29]. Si associem una certa quantitat fixa elemental d'energia al lliscament de cada element, podem obtenir l'energia alliberada en aquest procés a partir del nombre total d'elements que llisquen, i això permetria comparar la distribució d'energia al model amb la llei de Gutenberg-Richter.

Per tant, la propagació de ruptures es considera un fenomen probabilístic, en el sentit que quan comença un terratrèmol no és possible saber com arribarà a ser de gran. Després veurem que aquesta afirmació és molt més forta del que ara ens sembla. El típic *efecte dòmino*, on una caiguda sempre indueix la següent, correspondria al polèmic concepte de terratrèmol característic, un esdeveniment que es propaga sempre al llarg de tota la falla o sistema de falles i que, per tant, sempre alliberaria la mateixa quantitat d'energia. Així, ha de quedar clar que l'efecte dòmino no es correspondria amb el nostre model.

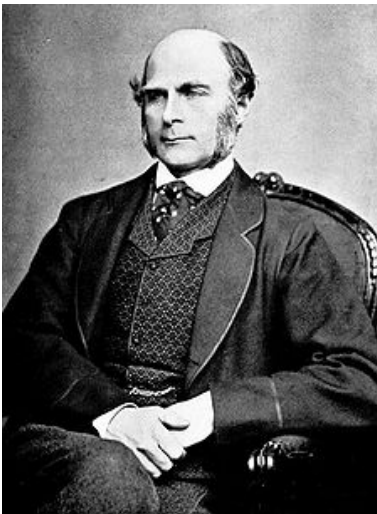
És molt significatiu que el model que acabem d'explicar, novedós i original en geofísica, introduït per Otsuka als anys setanta, ja era conegut per alguns matemàtics més de cent anys abans. Esmerçarem les properes pàgines a explicar la distribució d'energia del model.

2 El procés de Galton-Watson

A part de les apostes, molts probabilistes també s'han interessat en la reproducció.

G. Grimmett i D. Stirzaker

Ens traslладem ara a l'Anglaterra victoriana del segle XIX. Allà, Sir Francis Galton, polímata, pare dels conceptes estadístics de correlació i regressió i cosí de Charles Darwin, s'ocupava d'afers molt diversos. A més d'estudiar l'estatura dels fills en relació amb la dels pares, també estava preocupat pel declivi, i fins i tot l'extinció, de les famílies prominents de l'època, i per si aquest declivi era conseqüència d'una disminució de la fertilitat provocada per l'augment del confort. Si això fos així, aleshores la població es mantindria per la contribució de les classes populars [34]. Per a entendre millor el problema, va crear un model mínim on el nombre de fills varons de cada home era aleatori (en aquella època, l'abundància de dones no es considerava un problema). Tot i l'aparent simplicitat del model, Galton no va poder resoldre'l, i va decidir fer una crida pública d'ajuda (un cas precursor, segons com, del que actualment es coneix com a intel·ligència distribuïda). La crida no va fructificar, i Galton es va adreçar al matemàtic i reverend Henry William Watson.



Sir Francis Galton



Rev. Henry William Watson

Els pares del procés de Galton-Watson (fotos extretes de la Wikipedia i de www.wolframalpha.com, respectivament).

2.1 Definició del procés de Galton-Watson

Considerem uns «elements» que poden generar uns altres elements, i així successivament. Aquests elements poden representar homes de l'aristocràcia britànica que tenen descendents masculins —o, en una reinterpretació més actual, dones d'arreu que donen a llum les seves filles; o potser més apropiadament bactèries que es repliquen—, neutrons que emeten d'altres neutrons en una reacció nuclear en cadena o fragments de falles que llisquen durant un terratrèmol. El procés de Galton-Watson pressuposa que cadascun d'aquests elements dóna lloc a un nombre aleatori K d'elements nous, descendents de l'anterior, de tal manera que cada K és independent de la dels altres elements, i totes les K 's estan idènticament distribuïdes, amb probabilitats $P(K = 0) = p_0$, $P(K = 1) = p_1, \dots, P(K = k) = p_k, \dots$, amb $k = 0, 1, 2, \dots$ [12, 15]. (Naturalment, la condició de normalització imposa que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.)

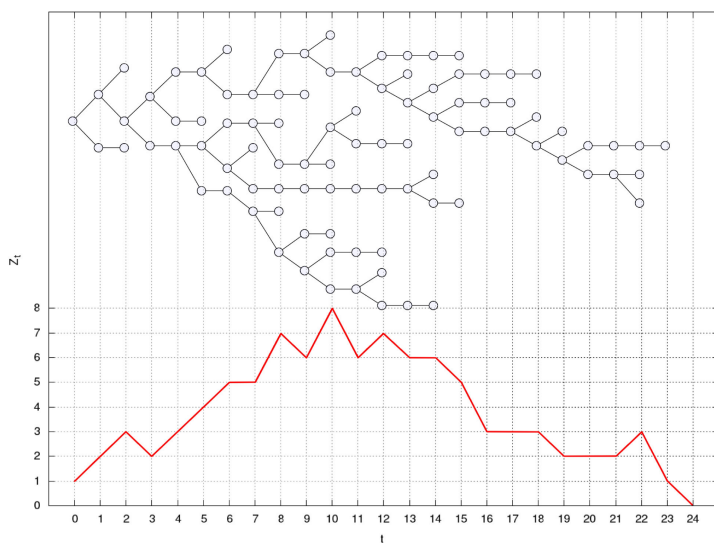


FIGURA 4: Una realització del procés de Galton-Watson. A dalt es mostra l'arbre associat al procés, començant per l'esquerra ($Z_0 = 1$). A sota, l'evolució del nombre d'elements nascuts a cada generació t . El model és binomial per a $P(K = k)$, amb $n = 2$ i $p = 1/2$, cosa que correspon al cas crític.

El model parteix inicialment d'un únic element, que s'anomena la generació 0 del procés, tal com mostra la figura 4. Els K descendents d'aquest primer element constitueixen la primera generació. Sigui $Z_0 = 1$ el nombre d'elements de la generació 0, Z_1 el nombre d'elements de la generació 1, etc. Òbviament, per construcció $P(Z_1 = k) = p_k$. El nombre d'elements de la generació $t + 1$ s'obté

a partir de l'anterior mitjançant

$$Z_{t+1} = \sum_{i=1}^{Z_t} K_i,$$

amb $t \geq 0$, on K_i correspon al nombre de descendents de cada element de la generació t . Aquesta equació senzilla pot usar-se directament per simular el procés, i serà molt important també en el tractament analític del model (per exemple, quan calculem la distribució de probabilitat de Z_t per a un t qualsevol). Alguns lectors probablement s'han adonat que les variables $Z_0, Z_1, \dots$ formen una cadena de Markov, però això no tindrà cap rellevància per al que ens interessa.

2.2 Funcions generatrius

Una eina matemàtica extremament útil serà la funció generatriu de probabilitats [10]. Aquesta es defineix, per a la variable aleatòria K , com

$$f_K(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \langle x^K \rangle,$$

on els claudàtors angulars indiquen valor esperat. La condició de normalització ens garanteix que $f_K(x)$ sempre està definida, com a mínim, a l'interval $[-1, 1]$, tot i que a nosaltres només ens interessarà l'interval $[0, 1]$.

Òbviament, la mateixa definició s'aplica a qualsevol altra variable aleatòria que prengui valors enters no negatius; en el cas particular de K (que representa el nombre de descendents d'un element) podem ometre el subíndex, és a dir, escriure $f_K(x) = f(x)$. Algunes propietats simples i útils són les següents:

1. $f_K(0) = P(K = 0)$;
2. $f_K(1) = 1$ (normalització);
3. $f'_K(1) = \sum_k p_k k = \langle K \rangle \equiv m$;
4. $f'_K(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ (funció no decreixent);
5. $f''_K(x) \geq 0$ per a $x \geq 0$ (funció no convexa mirant-la «des de dalt»);

on les primes denoten derivades (derivades per l'esquerra a $x = 1$), i on la propietat 3 òbviament només té sentit quan el primer moment no divergeix. Cal recordar que, tot i que estem il·lustrant aquestes propietats per a la variable aleatòria K , són vàlides per a qualsevol funció generatriu. Per tant, la gràfica d'una funció generatriu entre 0 i 1 està força condicionada. Ja podem anticipar que ens trobarem dos grans casos, segons si el valor esperat de K és $m < 1$ o $m > 1$. Això és molt natural, ja que el primer cas correspon a una població que, de mitjana, disminueix d'una generació a la següent, i en canvi en el segon cas la població, de mitjana, creix.

Una altra propietat, potser no tan directa, és que la funció generatriu de la suma de N variables independents i idènticament distribuïdes, K_i (amb N fixat),

és la potència enèsima de la funció generatriu de K . És a dir, que si

$$\Sigma = \sum_{i=1}^N K_i,$$

aleshores

$$f_{\Sigma}(x) = f_K(x)^N.$$

De fet,

$$\begin{aligned} f_{\Sigma}(x) &= \langle x^{\Sigma} \rangle = \langle x^{\sum K_i} \rangle = \langle x^{K_1} \cdot x^{K_2} \cdot \dots \cdot x^{K_N} \rangle = \\ &= \langle x^{K_1} \rangle \langle x^{K_2} \rangle \cdot \dots \cdot \langle x^{K_N} \rangle = f_K(x)^N, \end{aligned}$$

on els valors esperats factoritzen a causa de la independència estadística entre les diferents K_i .

En general, si les variables aleatòries no fossin idènticament distribuïdes (però sí independents), la funció generatriu de la seva suma seria el producte de les corresponents funcions generatrius. La demostració, de fet, és essencialment la mateixa: només cal modificar la notació per diferenciar les diverses funcions generatrius.

El pas següent consisteix a considerar que N també és una variable aleatòria, independent de K , amb funció generatriu $f_N(x)$. Aleshores,

$$f_{\Sigma}(x) = f_N(f_K(x)).$$

Observeu que aquesta fórmula no és més que una generalització de l'anterior, és a dir, ara calculem el valor esperat de potències de $f_K(x)$ que depenen dels valors que N pot prendre. En qualsevol cas, és fàcil de demostrar: si denotem el valor esperat respecte les K_i per $\langle \cdot \rangle_{K_i}$, i el valor esperat respecte N per $\langle \cdot \rangle_N$, tenim que

$$f_{\Sigma}(x) = \langle x^{\Sigma} \rangle = \langle \langle x^{\Sigma} \rangle_{K_i} \rangle_N = \langle f_K(x)^N \rangle_N = f_N(f_K(x)),$$

on la darrera igualtat és simplement la definició de la funció generatriu de probabilitat de la variable aleatòria N , avaluada al punt $f_K(x)$. Remarquem, però, que aquest argument necessita la condició d'independència.

2.3 Distribució del nombre d'elements per generació

Si ara recuperem el procés de Galton-Watson, és a dir, fem servir que $Z_{t+1} = \sum_{i=1}^{Z_t} K_i$, podem identificar Z_{t+1} amb Σ i Z_t amb N . Per tant,

$$f_{Z_{t+1}}(x) = f_{Z_t}(f_K(x)) = f_{Z_t}(f(x)),$$

obviant el subíndex K . Com que $f_{Z_1}(x) = f(x)$, es pot veure per inducció que la funció generatriu de Z_t ve donada per

$$f_{Z_t}(x) = f(f(\dots f(x))) = f^t(x),$$

on el superíndex t denota composició t vegades. Això és vàlid per a $t = 1, 2, \dots$; per a $t = 0$ tenim, òbviament, que $f_{Z_0}(x) = x$ (ja que $Z_0 = 1$ amb probabilitat 1). En resum, la funció generatriu del nombre d'elements de cada generació s'obté mitjançant composicions successives de la funció $f(x)$. Aquest resultat no elemental el va provar per primer cop Watson l'any 1874 [12].

2.4 El nombre esperat d'elements per generació

Ara presentem un resultat certament il·luminador, que ens farà servei més endavant. Tot i que, generalment, les composicions successives de la funció generatriu porten a expressions matemàtiques molt complicades, els moments de Z_t es poden computar d'una altra manera, molt més senzilla [12]. Fent servir la propietat 3 de la pàgina 15 i la composició de funcions generatrius, tenim que el valor esperat de Z_t és

$$\langle Z_t \rangle = \left. \frac{d}{dx} f^t(x) \right|_{x=1}.$$

Si escrivim

$$\frac{d}{dx} f^t(x) = \frac{d}{dx} f(f^{t-1}(x)) = f'(f^{t-1}(x)) \frac{d}{dx} f^{t-1}(x),$$

aleshores, per inducció

$$\frac{d}{dx} f^t(x) = f'(f^{t-1}(x)) f'(f^{t-2}(x)) \cdots f'(f^2(x)) f'(f(x)) f'(x).$$

Prenent $x = 1$, i observant que en aquest punt totes les funcions generatrius valen 1, arribem a

$$\langle Z_t \rangle = f'(1)^t = m^t.$$

Per tant, quan $m < 1$ el nombre esperat d'elements per generació decreix exponencialment, i en canvi quan $m > 1$ aquest nombre creix. Això constitueix, de fet, una realització estocàstica del creixement malthusià. És per això que, de vegades, m s'anomena la raó de ramificació. Quan $m = 1$ la mida mitjana de la població és constant, però després veurem que això no implica que la població assoleixi un estat estable. Els moments d'ordre superior es poden calcular de manera similar, però no són tan útils com la mitjana.

També és interessant estudiar el valor esperat del nombre d'elements d'una generació condicionat al valor de la generació anterior, és a dir, $\langle Z_{t+1} \mid Z_t = z_t \rangle$. Com que quan Z_t és fix, $Z_{t+1} = \sum_{i=1}^{Z_t} K_i$, prenent el valor esperat tenim que

$$\langle Z_{t+1} \mid Z_t = z_t \rangle = z_t m.$$

Aquest resultat pot usar-se per relacionar els processos de ramificació amb les martingales [10], però això ara no ens ha de preocupar.

2.5 La probabilitat d'extinció

El procés de Galton-Watson es considera extingit quan $Z_t = 0$ per primera vegada (és a dir, per a la generació que dona lloc a $Z_t = 0$ per primer cop). Aleshores, totes les Z 's posteriors són òbviament també zero, i en aquest sentit l'extinció es pot considerar un «estat absorbent» del sistema. Ara veurem que, per al procés de Galton-Watson, la probabilitat d'extinció és 1 (extinció segura) per a $m \leq 1$, i en canvi és més petita que 1 quan $m > 1$. Això ho va demostrar per primer cop J. F. Steffensen cap al 1930 [12]. De fet, l'extinció es pot donar a la primera generació, $Z_1 = 0$, o a la segona, $Z_2 = 0$, etc. Com $\{Z_t = 0\}$ inclou tots els esdeveniments $\{Z_i = 0\}$ per a $i = 1, \dots, t$, aleshores $P(Z_1 = 0, \dots, Z_t = 0) = P(Z_t = 0)$. Per tant, la probabilitat d'extinció P_{ext} ve donada per

$$P_{\text{ext}} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Z_1 = 0 \text{ o } Z_2 = 0 \text{ o } \dots \text{ o } Z_t = 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Z_t = 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(0),$$

és a dir, per la iteració infinita del punt $x = 0$ a través de la funció generatriu $f(x)$ (aquí, de fet, fem servir que la probabilitat del valor 0 és el valor de la funció generatriu al punt 0, i que la funció generatriu de Z_t ve donada per la t -èsima composició de $f(x)$).

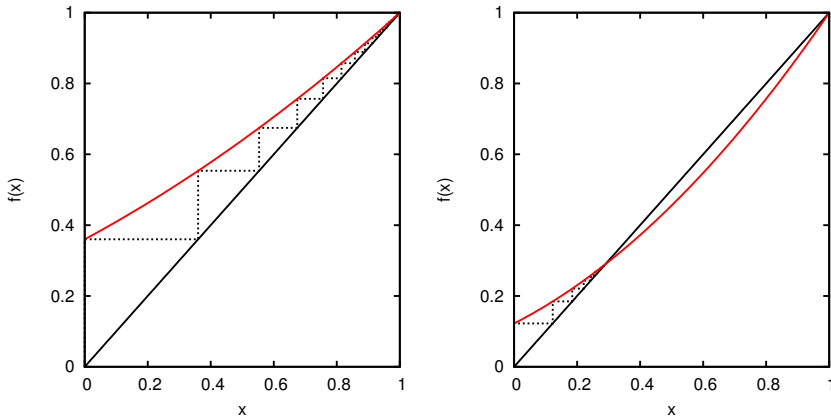


FIGURA 5: Funció generatriu de probabilitats $f(x)$ del nombre de descendents per element i iteració del punt $x = 0$ mitjançant les successives composicions de $f(x)$. Els punts fixos corresponen als punts de tall amb la diagonal; els més propers a zero són també atractors. A l'esquerra, cas subcrític. A la dreta, cas supercrític. El model és binomial, amb $n = 2$.

Calculem ara la iteració $f^t(0)$. A l'interval $[0, 1]$ la funció $f(x)$ és no decreixent i no convexa (mirada des de dalt) i només pren valors entre p_0 i 1. Si el pendent de $f(x)$ a $x = 1$, que ve donat per $m = \langle K \rangle = f'(1)$, és més petit o igual que 1, aleshores $f(x)$ només pot tallar (o tocar) la diagonal a $x = 1$ (si no, $f(x)$ hauria de ser convexa en algun punt), i la iteració del punt $x = 0$ acaba al

punt $x = 1$ (que és l'atractor; vegeu la figura 5). En conseqüència,

$$P_{\text{ext}} = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(0) = 1,$$

és a dir, l'extinció és inevitable si $m \leq 1$. De tota manera, hi ha una excepció trivial, que correspon al cas patològic $p_1 = 1$ (i 0 per a la resta); es tracta d'una situació molt ensopida, on tot element té sempre un únic descendent (pot correspondre, per exemple, a la successió de reis o reines en una monarquia, si no tenim en compte les revolucions). En aquest cas, $f(x) = x$, i per tant $\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(0) = 0$, cosa que implica, òbviament, que la probabilitat d'extinció és zero.

Si el pendent de $f(x)$ a $x = 1$ és $m > 1$ (cosa que només pot passar per a una funció generatriu de probabilitats no lineal, és a dir, $p_0 + p_1 < 1$), aleshores $f(x)$ ha de tallar la diagonal en algun punt x^* més petit que 1, que serà l'atractor al qual la iteració tendeix (vegeu novament la figura 5). Matemàticament,

$$P_{\text{ext}} = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(0) = x^*,$$

on

$$x^* = f(x^*) \text{ amb } x^* < 1.$$

La demostració es desenvolupa amb més detall a l'apèndix. En resum,

$$P_{\text{ext}} = \begin{cases} 1 & \text{si } m \leq 1 \\ x^* & \text{si } m > 1 \end{cases}$$

amb $x^* < 1$, excepte en el cas trivial $p_1 = 1$, on $m = 1$ però $P_{\text{ext}} = 0$.

Això mostra clarament com, en general, el punt $m = 1$ separa dos comportaments diferents: extinció assegurada per a $m \leq 1$, i la possibilitat de supervivència (extinció no assegurada) per a $m > 1$. Per tant, $m = 1$ correspon al cas crític que separa aquests dos comportaments, anomenats conseqüentment subcrític ($m < 1$) i supercrític ($m > 1$).

2.6 La probabilitat d'extinció per al cas binomial

Per a posar un exemple il·lustratiu, considerarem un cas concret i senzill: una distribució binomial [10, 29],

$$p_k = P(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{per a } k = 0, \dots, n.$$

Això correspon a suposar que cada element disposa només d'un cert nombre n d'intents de generar descendència, i que cadascun d'aquests intents té una probabilitat fixa p de ser exitós. Resulta que, fent servir el teorema binomial, la funció generatriu de probabilitat pren la forma següent:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k x^k = (1-p + px)^n.$$

Considerem com a exemple el cas més simple, $n = 2$, i definim $q = 1 - p$. Com ja hem vist, la probabilitat d'extinció vindrà donada per la solució més petita a $[0, 1]$ de

$$x = (q + px)^2.$$

Per tant,

$$x = \frac{1 - 2pq \pm \sqrt{(1 - 2pq)^2 - 4p^2q^2}}{2p^2},$$

però l'arrel quadrada es pot escriure $\sqrt{1 - 4p(1 - p)} = \sqrt{(1 - 2p)^2} = (1 - 2p)$, i aleshores,

$$x = \frac{1 - 2p + 2p^2 \pm (1 - 2p)}{2p^2} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^2 \\ 1 \end{cases}.$$

Per tant, l'arrel més petita depèn de si p està per sobre o per sota de $1/2$:

$$P_{\text{ext}} = \begin{cases} 1 & \text{per a } p \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{q}{p}\right)^2 & \text{per a } p \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Com que (per a la distribució binomial amb $n = 2$) el valor esperat és $m = 2p$, el cas crític $m = 1$ correspon òbviament a $p = 1/2$, cosa que encaixa amb el comportament de P_{ext} .

2.7 Inestabilitat de la població

Tot i que aquesta subsecció conté un resultat molt interessant que pot ajudar a entendre el comportament d'un procés de Galton-Watson, es pot saltar, ja que no és necessària per a llegir la resta de l'article.

La iteració del punt $x = 0$, de fet, és il·lustrativa del que li passa a tota la funció generatriu de Z_t quan $t \rightarrow \infty$. De fet, de la mateixa manera que a la subsecció 2.5, podríem comprovar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{Z_t}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x) = 1 \text{ si } m \leq 1,$$

però en canvi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{Z_t}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x) = x^* < 1 \text{ si } m > 1,$$

excepte per a $x = 1$ (vegeu la figura 6).

Recordem que una funció generatriu plana correspon a probabilitats iguals a zero, excepte per al valor zero, és a dir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(Z_t = k) = 0, \text{ excepte per a } k = 0.$$

Així, per a $m \leq 1$, tenim que $\lim_{t \rightarrow \infty} P(Z_t = 0) = 1$, i la població s'extingeix, però per a $m > 1$ hem vist que $\lim_{t \rightarrow \infty} P(Z_t = 0) = x^* < 1$; i com que qualsevol

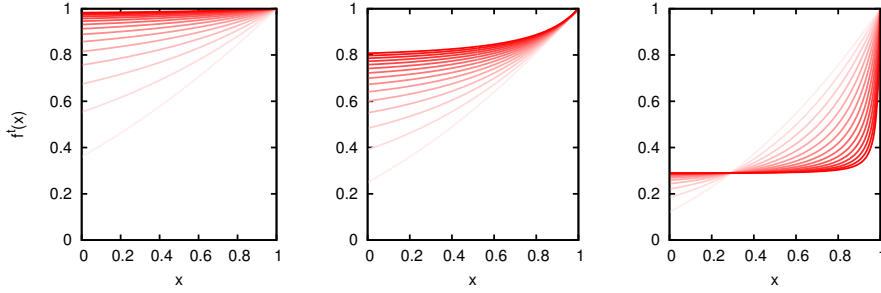


FIGURA 6: Composicions successives de la funció $f(x)$, per a tot x , que donen lloc a la funció generatriu de probabilitats de Z_t , començant per $t = 1$ (línia més clara) fins a $t = 15$ (línia més fosca). Quan t creix s'obtenen funcions més planes, cada cop més a prop del punt fix. D'esquerra a dreta, casos subcrític, crític i supercrític, per a un model binomial amb $n = 2$.

altre valor finit de K té probabilitat zero, això implica que $Z_t \rightarrow \infty$ quan $t \rightarrow \infty$, és a dir, que Z_t no pot mantenir-se positiva i fitada: l'únic estat estable és l'extinció. Òbviament, el procés de Galton-Watson en aquest límit no és realista, en el sentit que altres factors externs podrien evitar que la població creixés indefinidament. Però això no ens ha de preocupar, sempre que tinguem clares les limitacions del model.

2.8 Transició de fase de no-equilibri

Passem ara a analitzar més detalladament què succeeix al voltant del «punt de transició» ($m = 1$). Tal com acabem de veure, la probabilitat d'extinció ve donada per la solució de $P_{\text{ext}} = f(P_{\text{ext}})$. Quan $m \leq 1$, l'única solució a $[0, 1]$ és $P_{\text{ext}} = 1$ (excepte per al cas trivial $p_1 = 1$). Quan $m > 1$, hem de prendre la solució més petita de $P_{\text{ext}} = f(P_{\text{ext}})$ a $[0, 1]$. Reescrivint-ho tot en termes de la probabilitat de no-extinció, $\rho = 1 - P_{\text{ext}}$, hem de trobar el valor de ρ més gran que sigui solució de

$$f(1 - \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (1 - \rho)^k = 1 - \rho$$

a l'interval $[0, 1]$. Ens centrem en el cas on P_{ext} és proper a 1, i per tant ρ és proper a zero, i, usant el teorema binomial, trobem l'expansió $(1 - \rho)^k = 1 - k\rho + k(k-1)\rho^2/2 + \dots$, la qual ens condueix a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k p_k \rho + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k \rho^2 + \dots = \\ = 1 - m\rho + \frac{1}{2} \mu \rho^2 + \dots = 1 - \rho, \end{aligned}$$

on hem introduït la mitjana m i el segon moment factorial $\mu = \langle K(K-1) \rangle$, que suposem que existeixen i són finits (per tant, suposem que els moments de tots els ordres són finits). Així doncs, fins a segon ordre en ρ , hem de resoldre

$$\left(\frac{1}{2}\mu\rho + 1 - m\right)\rho \simeq 0.$$

Òbviament, una solució és $\rho = 0$, i de fet és fàcil veure que aquesta solució és exacta per a qualsevol ordre en ρ . L'altra solució és $\rho \simeq 2(m-1)/\mu$, però cal parar atenció al valor de μ , que pot escriure's $\mu = \sigma^2 + m(m-1)$, amb $\sigma^2 = \langle (K-m)^2 \rangle = \langle K^2 \rangle - m^2$, és a dir, la variància. Suposant que $\sigma^2 \neq 0$,

$$\frac{2(m-1)}{\mu} = \frac{2(m-1)}{\sigma^2[1 + m(m-1)/\sigma^2]} = \frac{2(m-1)}{\sigma^2} \left[1 - \frac{m(m-1)}{\sigma^2} + \dots\right]$$

(on hem usat la fórmula de la suma d'una sèrie geomètrica), amb $m(m-1) < \sigma^2$ si ens trobem suficientment a prop del punt crític, i per tant com que ρ al voltant de zero implica m al voltant d'1, podem escriure la segona solució de la manera següent

$$\rho \simeq \frac{2(m-1)}{\sigma^2},$$

que es troba al rang que ens interessa per a $m > 1$.

En resum, tenim que

$$\begin{aligned} \rho &= 0 & \text{si } m \leq 1, \\ \rho &\simeq 2(m-1)/\sigma^2 & \text{si } m > 1, \end{aligned}$$

si ρ és prou petita. Per a $m > 1$, aquest límit és equivalent a $m \rightarrow 1$. El cas particular de $\sigma^2 = 0$, de fet, només es dona per a la solució trivial on $p_1 = 1$ (altrament, la mitjana no podria acostar-se a 1).

Així, hem obtingut un comportament anàleg al d'una transició de fase contínua en equilibri termodinàmic, on la variació d'un paràmetre de control, per exemple la temperatura, indueix un canvi brusc (continu però amb derivada discontinua) en un «paràmetre d'ordre», diguem-ne la magnetització en l'exemple d'un sistema magnètic. Identificant m amb el paràmetre de control (la temperatura o, essent més exactes, l'invers de la temperatura) i ρ amb el paràmetre d'ordre (la magnetització), i pensant en ρ com a funció de m , podem escriure aquesta relació de la mateixa manera que es fa a les transicions de fase, on m_c representarà el punt de transició,

$$\begin{aligned} \rho &= 0 & \text{per sota de } m_c, \\ \rho &\propto (m - m_c)^\beta & \text{per sobre però a prop de } m_c. \end{aligned}$$

Seguint amb l'exemple dels sistemes magnètics, m_c correspondria a la famosa temperatura de Curie, el valor precís de la temperatura per al qual té lloc la transició abrupta, que separa una fase no magnètica, per a temperatures

altes, d'una fase magnètica (o ferromagnètica, amb magnetització espontània no nul·la) per a temperatures baixes. Acabem de demostrar que el procés de Galton-Watson s'ajusta a aquesta fenomenologia, amb

$$m_c = 1 \text{ i } \beta = 1,$$

on suposem que la variància de K no es fa 0 al punt de transició.

Podem comparar el resultat anterior més general, $\rho \simeq 2(m-1)/\sigma^2$, per a m per sobre però a prop d'1, amb el resultat que hem trobat per al cas binomial amb $n = 2$, on

$$\rho = 1 - \left(\frac{1-p}{p} \right)^2 = \frac{2p-1}{p^2}$$

quan $p \geq 1/2$. Fent servir que, en aquest cas, $m = 2p$ i $\sigma^2 = 2pq$ (vegeu [29]),

$$\frac{2(m-1)}{\sigma^2} = \frac{2p-1}{pq} \simeq \frac{2p-1}{p^2},$$

ja que $q = 1-p \simeq p$ per a $p \simeq 1/2$. Per tant, ambdós resultats són coincidents prop del punt de transició.

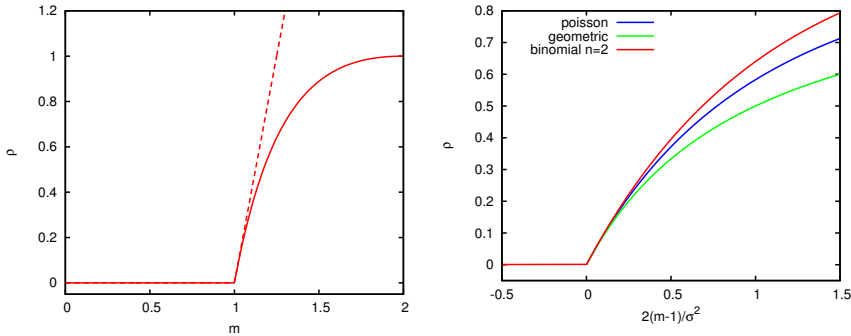


FIGURA 7: Esquerra: probabilitat de no-extinció ρ com a funció del nombre mitjà de descendents per element, m . Les línies discontinües corresponen a l'aproximació que s'explica al text. El canvi abrupte en ρ és la marca de la casa d'una transició de fase contínua. La distribució de nombre de descendents és binomial, amb $n = 2$. Dreta: el mateix, però com a funció de la distància al punt crític reescalada, $2(m-1)/\sigma^2$, on σ^2 indica la variància a $m = 1$. També s'hi mostren les distribucions de Poisson i geomètrica.

Ja per acabar, i encara que sigui només en pro de la completesa, podem jugar amb un cas nou, diferent de l'anterior, el que correspon al valor patològic $\sigma^2 = 0$ (per al qual no són vàlides les derivacions de dalt). Considerem primer el següent model: $p_0 = 1 - \lambda_1$, $p_1 = \lambda_1$ (i 0 altrament), amb $\lambda_1 \leq 1$. Aleshores, $m = \lambda_1$, i ja

sabem que $\rho = 0$. Considerem ara $p_1 = 1 - \lambda_2$, $p_2 = \lambda_2$, i, per tant, $m = 1 + \lambda_2$. En aquest cas, el punt de tall de la funció generatriu amb la diagonal és per a $\rho = 1$ sempre. Quan considerem la variació de les probabilitats donades pels dos models conjuntament obtenim una transició de fase discontinua, o de primer ordre.

2.9 La distribució de la mida total de la població: distribució binomial i arbres amb arrel

En aquesta subsecció ens centrarem en el càlcul de la mida total S de la població quan fem la suma respecte de totes les generacions, és a dir,

$$S = \sum_{t=0}^{\infty} Z_t.$$

Aquesta quantitat correspon al nombre total d'individus que s'han originat o al nombre total de neutrons que participen en una reacció nuclear en cadena o, en el nostre model dels terratrèmols, a l'energia total radiada durant un esdeveniment.

Recuperem un cop més el cas particular de la distribució binomial

$$p_k = P(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \text{per a } k = 0, \dots, n.$$

En aquest cas, la distribució de la mida total es pot calcular fent servir probabilitat i combinatòria bàsiques. El punt clau és la correspondència natural entre els processos de ramificació i els *arbres* (és a dir, els grafs connectats sense cicles). Cada individu correspon a un node, i cada branca o aresta del graf correspon a una relació de descendència entre dos nodes. Òbviament, tots els nodes tenen una sola branca entrant (un sol «pare»), excepte el node que correspon a la generació zero (que, en aquest context, s'anomena l'*arrel* de l'arbre). Per tant, el nombre de branques és el nombre de nodes menys 1. Com que la mida s d'un arbre és el seu nombre de nodes, el nombre de branques serà $s - 1$, i el nombre de branques absents (intents de reproducció no favorables) serà $ns - (s - 1)$ (ja que el nombre total de possibles branques a partir de s nodes és ns) [6]. Per tant, cada arbre concret de mida s apareix amb probabilitat $p^{s-1} (1 - p)^{(n-1)s+1}$, i la probabilitat de tenir un arbre qualsevol de mida s s'obté sumant respecte tots els arbres de mida s . Per al cas $n = 2$ el nombre d'arbres binaris de mida s correspon al número de Catalan

$$C_s = \frac{1}{s+1} \binom{2s}{s};$$

vegeu l'apèndix per al càlcul complet. Per tant,

$$P(S = s) = \frac{1}{s+1} \binom{2s}{s} p^{s-1} (1 - p)^{s+1} \quad \text{amb } s = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Fent servir la funció generatriu dels números de Catalan es pot comprovar que aquesta expressió està normalitzada per a $p \leq 1/2$ però no per a $p > 1/2$, i que, de fet,

$$\sum_{s=1}^{\infty} P(S = s) = P_{\text{ext}};$$

novament, vegeu l'apèndix.

De totes maneres, l'expressió (1) no ens ajuda gaire a comprendre el comportament de la distribució $P(S = s)$ (si no és que tenim una gran intuïció per al comportament dels coeficients binomials). Però fent servir l'aproximació de Stirling [1, 7] podem obtenir un resultat aproximat però més informatiu [6]:

$$C_s \sim \frac{4^s}{\sqrt{\pi} s^{3/2}}.$$

Aquesta expressió, vàlida per a mides grans, és una exponencial creixent en s , i el terme $s^{3/2}$ no sembla tenir un paper important, asimptòticament. Ara bé, en introduir el factor $p^{s-1}(1-p)^{s+1}$, resulta

$$P(S = s) \sim \frac{1-p}{\sqrt{\pi} p} \frac{[4p(1-p)]^s}{s^{3/2}}.$$

Com que $p(1-p) \leq 1/4$, el terme exponencial esdevé decreixent excepte per a $p = 1/2$, on desapareix totalment. De fet, podem anar un pas més enllà si posem

$$[4p(1-p)]^s = e^{s \ln[4p(1-p)]} = e^{-s/\xi(p)},$$

on $\xi(p)$ és una mida característica que depèn de p , definida per

$$\xi(p) = \left(\ln \frac{1}{4p(1-p)} \right)^{-1},$$

i finalment

$$P(S = s) \sim \frac{1-p}{\sqrt{\pi} p} \frac{e^{-s/\xi(p)}}{s^{3/2}}.$$

Per tant, per a s gran però considerablament més petita que $\xi(p)$, la distribució de probabilitat de la mida total de la població és essencialment una llei de potències amb exponent $3/2$; i per a s encara més gran, el decreixement exponencial domina. En aquest sentit, $\xi(p)$ és una escala característica. L'excepció es dona per a $p = 1/2$, on $\xi(p) \rightarrow \infty$, el terme exponencial desapareix i la distribució es converteix en una llei de potències pura. En aquest cas, l'exponent $3/2$ és un exponent crític. Per a tenir una idea de la bondat de l'aproximació que hem dut a terme, vegeu la figura 8.

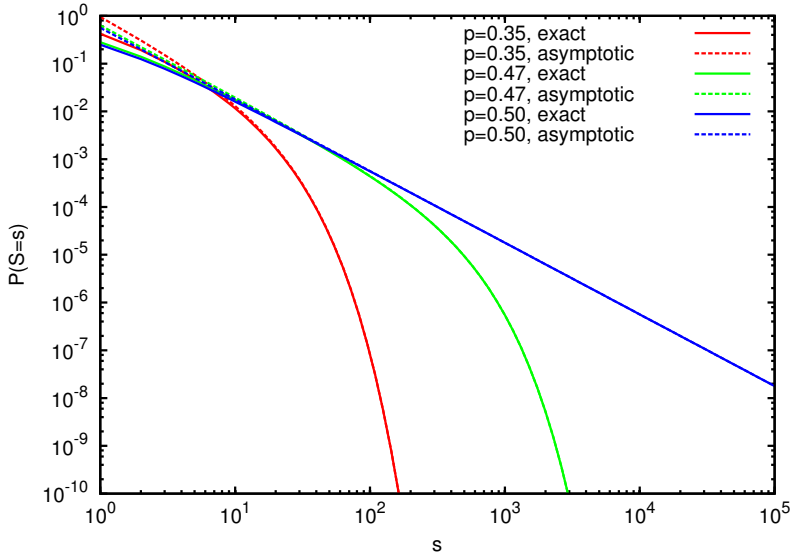


FIGURA 8: Distribució de probabilitat de la mida total de la població S per a diferents valors del paràmetre p en un cas binomial amb $n = 2$. Es mostren el cas subcrític i el cas crític; en aquest darrer la llei de potències pura es fa ben palesa. També es mostra la solució asimptòtica per a s gran.

De la divergència de la mida característica $\xi(p)$ sorgeix un altre exponent crític [6]. Introduint la desviació respecte el punt crític $\Delta \equiv p - p_c$, i en el nostre exemple $\Delta = p - 1/2$, podem escriure

$$p(1-p) = \frac{1}{4} - \Delta^2,$$

i per tant, a prop del punt crític (és a dir, per a Δ petit),

$$\frac{1}{4p(1-p)} = \frac{1}{1-4\Delta^2} \simeq 1 + 4\Delta^2 + \dots,$$

i per tant

$$\ln \frac{1}{4p(1-p)} \simeq \ln(1 + 4\Delta^2) \simeq 4\Delta^2 + \dots$$

(fent servir el desenvolupament de Taylor del logaritme al voltant de 1), i llavors

$$\xi(p) = \left(\ln \frac{1}{4p(1-p)} \right)^{-1} \simeq \frac{1}{4\Delta^2} + \dots$$

En paraules, quan els físics diuen que la mida característica $\xi(p)$ divergeix al punt crític com una llei de potències, amb exponent igual a 2, estan dient el

que expressa l'equació anterior. A més, aquesta equació ens permet escriure d'una manera més senzilla la fórmula asimptòtica (s gran) per a la distribució de la mida total, al voltant del punt crític:

$$P(S = s) \sim \frac{1 - p}{\sqrt{\pi p}} \frac{e^{-4(p-p_c)^2 s}}{s^{3/2}}.$$

Noteu que la distribució té la mateixa forma tant per sobre com per sota del punt crític si es manté la distància a aquest, $|p - p_c|$, i l'única diferència es troba en la constant multiplicativa, que depèn de p directament. Això és perquè per sobre del punt crític la distribució no està normalitzada (a causa de la massa a l'infinit; vegeu l'apèndix). Ara sí, després d'aquestes últimes consideracions, que es troben a [6], ja podem dir alguna cosa de la distribució de probabilitat de l'energia en el model d'Otsuka (model que, de ben segur, els nostres lectors ja han identificat com un cas particular del procés de Galton-Watson). Si prenem $p < 1/2$, la distribució que obtenim té una cua exponencial, amb una escala característica donada per $\xi(p)$. Això significa que els terratrèmols s'atenuen, o s'extingeixen, i que de cap manera poden dissipar energies per sobre de $\xi(p)$ (la probabilitat d'obtenir un esdeveniment de mida superior a $10\xi(p)$ és extraordinàriament petita). Aquest és el cas subcrític.

En canvi, si $p > 1/2$ hi ha dos tipus de terratrèmols. Els primers són semblants al del cas subcrític: tenen una mida limitada per l'escala que defineix $\xi(p)$, però els segons són diferents, són terratrèmols infinits (recordem que $P_{\text{ext}} < 1$ en aquest cas!). Per a aquest segon tipus de terratrèmol, la pertorbació inicial (la caiguda d'una sola peça de dòmino) dona lloc a un creixement exponencial. Aquest segon és el cas supercrític. Ara bé, ni el cas subcrític ni el cas supercrític són compatibles amb la llei de Gutenberg-Richter, la qual presenta una distribució d'energies en llei de potències, sense cap escala característica. Únicament el cas crític, $p = 1/2$, és capaç de reproduir aquesta estadística. Per tant, la propagació d'un terratrèmol al llarg d'una falla és un fenomen estocàstic no només en el sentit que no sabem què passarà després que un fragment llisqui sinó que, molt pitjor, en el cas crític la probabilitat que té l'activitat de créixer i la de decreixer són iguals.

Cal remarcar que la concordança dels resultats és qualitativa, però no quantitativa, ja que el model dona $\alpha = 3/2 = 1.5$ i en canvi per a terratrèmols reals s'ha trobat que $\alpha \approx 5/3 \approx 1.67$. A la subsecció següent expliquem que el valor $3/2$ és robust, i que altres versions del procés de Galton-Watson condueixen al mateix exponent. Yan Kagan ha estudiat a fons aquesta discrepància entre la modelització i els terratrèmols reals [16], i conclou que els mesuraments empírics (els que permeten obtenir el moment sísmic, o l'energia) contenen una sèrie d'artificis operacionals que fan que el valor de l'exponent per a terratrèmols creixi, i per tant, segons aquest autor, ambdós exponents serien realment més propers i probablement compatibles.

2.10 La funció generatriu de la mida total de la població

Ens movem ara als Estats Units, en plena Segona Guerra Mundial. Mentre els soldats morien al camp de batalla i els civils patien els horrors de la «barbàrie», un grup de científics es reunien en la tranquil·litat de Los Álamos, Nou Mèxic, amb l'objectiu de fer recerca i desenvolupar les primeres bombes nuclears. Un dels integrants d'aquest grup de privilegiats era el gran matemàtic polonès Stanislaw Ulam, contractat pel seu famós col·lega John Von Neumann [33]. Juntament amb David Hawkins —filòsof de la ciència i el matemàtic amateur amb més talent que mai va conèixer Ulam— es dedicaven a investigar la multiplicació de neutrons en reaccions nuclears en cadena, fent servir el que ara anomenem processos de ramificació. Sembla que desconeixien per complet els treballs pioners de Galton i Watson.



FIGURA 9: El matemàtic polonès Stanislaw Ulam, al costat de la versió actual de la primera pàgina de [13], després que fos desclassificada. Aquesta feina, que conté deduccions i fórmules importants per als processos de ramificació, va formar part de l'anomenat projecte Manhattan.

Hawkins i Ulam van provar, entre d'altres coses, que la funció generatriu de probabilitats $g(x)$ de la mida total de la població $S = \sum_{t \geq 0} Z_t$ compleix, en els casos subcrític i crític, que

$$g(x) = xf(g(x)),$$

on, com de costum, $f(x)$ és la funció generatriu del nombre de descendents d'un sol element. El que segueix a continuació està basat en aquells treballs del projecte Manhattan [13], però la nostra deducció és, segons com, més senzilla.

El que per a nosaltres és la mida total de la població correspon al nombre total de neutrons generats durant una reacció nuclear.

Primer de tot ens serà més útil considerar la mida de la població des de la generació 1 fins a la τ (per tant, sense comptar de moment la generació zero). És a dir,

$$S_\tau = \sum_{t=1}^{\tau} Z_t,$$

amb probabilitats $q_s^{(\tau)} = P(S_\tau = s)$ i funció generatriu $\tilde{g}_\tau(x) = \sum_{s \geq 0} q_s^{(\tau)} x^s$. Una mida total s entre les generacions 1 fins a τ es pot descompondre en una mida k a la primera generació, amb probabilitat p_k , i una mida $s - k$ en les restants $\tau - 1$ generacions (de la 2 a la τ), però amb k elements inicials; això passa amb probabilitat $q_{s-k}^{(\tau-1,k)}$ (fixeu-vos que, amb la notació actual, $q_s^{(\tau)} = q_s^{(\tau,1)}$). Aleshores, per la llei de les probabilitats totals [26]

$$q_s^{(\tau)} = \sum_{k=1}^s p_k q_{s-k}^{(\tau-1,k)},$$

excepte per a $s = 0$, on $q_0^{(\tau)} = p_0$. Si ara multipliquem per x^s i sumem per a tot s , des de 0 fins a ∞ , obtindrem al cantó esquerre la funció generatriu de S_τ , que resulta ser

$$\tilde{g}_\tau(x) = p_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^s p_k q_{s-k}^{(\tau-1,k)} x^s = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left[\sum_{s=k}^{\infty} q_{s-k}^{(\tau-1,k)} x^{s-k} \right] x^k.$$

Ara, el terme entre claudàtors és la funció generatriu de la mida acumulada entre les generacions 1 i τ , però amb k elements inicials (és a dir, $Z_1 = k$ enlloc de $Z_0 = 1$). Com que les evolucions dels k individus inicials són independents entre si, la mida resultant serà la suma de k variables aleatòries independents, cadascuna d'elles amb funció generatriu $\tilde{g}_{\tau-1}$, i per tant la funció generatriu total corresponent serà $[\tilde{g}_{\tau-1}(x)]^k$:

$$[\tilde{g}_{\tau-1}(x)]^k = \sum_{s-k=0}^{\infty} q_{s-k}^{(\tau-1,k)} x^{s-k}.$$

Substituint a dalt, obtenim

$$\tilde{g}_\tau(x) = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k [\tilde{g}_{\tau-1}(x)]^k x^k = f(x \tilde{g}_{\tau-1}(x)),$$

on hem introduït la definició de $f(x) = f_K(x)$.

Finalment, si volem comptar la generació zero, hem d'afegir una variable aleatòria amb funció generatriu x (ja que Z_0 pren el valor 1 amb probabilitat 1), i per tant la funció generatriu de la mida acumulada entre les generacions 0 i τ serà el producte $g_\tau(x) = x \tilde{g}_\tau(x)$. Això ens porta a

$$g_\tau(x) = x f(g_{\tau-1}(x)).$$

Tornant a la mida total

$$S = \sum_{t=0}^{\infty} Z_t,$$

la seva funció generatriu és $g(x) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} g_{\tau}(x)$. Si la probabilitat d'extinció és 1, és a dir, si el sistema no és supercrític, això és equivalent a $\lim_{\tau \rightarrow \infty} g_{\tau-1}(x)$, i per tant tenim que

$$g(x) = xf(g(x)).$$

Així doncs, la solució d'aquesta equació, on $f(x)$ és coneguda, és la funció generatriu que buscàvem. En general no podrem resoldre aquesta equació, però per a obtenir els moments de S de fet no ens caldrà. Derivant respecte x tenim que

$$g'(x) = f(g(x)) + xf'(g(x))g'(x),$$

i prenent $x = 1$ i aïllant,

$$\langle S \rangle = g'(1) = \frac{1}{1 - f'(1)} = \frac{1}{1 - m},$$

que tendeix a infinit quan $\langle K \rangle = m = f'(1)$ tendeix a 1, és a dir, al punt crític. Òbviament, com ja hem dit, aquest resultat no es pot aplicar al cas supercrític, $m > 1$, on la població pot créixer fins a l'infinit amb probabilitat no nul·la. Si continuem derivant, obtenim de manera similar els moments d'ordre superior. Aquest resultat, de fet, l'hauríem pogut obtenir directament, ja que

$$\langle S \rangle = \langle Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots \rangle = \langle Z_0 \rangle + \langle Z_1 \rangle + \langle Z_2 \rangle + \dots = 1 + m + m^2 + \dots = \frac{1}{1 - m},$$

on la darrera igualtat només és vàlida en el cas subcrític, ja que altrament $\langle S \rangle$ divergeix.

L'equació per a $g(x)$ es pot resoldre fàcilment en alguns casos (molt pocs). Tornant al nostre cas binomial amb $n = 2$, on $f(x) = (1 - p + px)^2$, tenim que

$$g(x) = xf(g(x)) = x(1 - p + pg(x))^2,$$

i per tant

$$g(x) = \frac{1 - 2pqx \pm \sqrt{1 - 4pqx}}{2p^2x},$$

amb $q = 1 - p$. Ara, desenvolupant per Taylor l'arrel quadrada,

$$\sqrt{1 - 4pqx} = 1 - 2pqx - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(2s-1)!! 2^{s+1}}{(s+1)!} (pqx)^{s+1},$$

observem que han aparegut novament els números de Catalan i obtenim (vegeu l'apèndix per als detalls),

$$g(x) = \frac{q}{p} \sum_{s=1}^{\infty} C_s (pqx)^s.$$

Noteu també que únicament el cas de signe menys davant de l'arrel ens proporciona realment una vertadera funció generatriu. Per tant, els coeficients de x^s ens porten a

$$P(S = s) = C_s p^{s-1} q^{s+1},$$

per a $s \geq 1$. Aquest resultat és exactament el mateix que hem obtingut anteriorment. Aquest vegada, però, no hem hagut de comptar arbres, perquè els números de Catalan han aparegut de forma natural en fer el desenvolupament en sèrie (de fet, no era necessari ni conèixer-los!).

Per tant, hem confirmat que el model d'Otsuka amb una distribució binomial i $n = 2$ porta a una llei de potències amb exponent $3/2$ per a la distribució de la mida total de la població. Però el que realment ens agradaria és estudiar com és de robust aquest exponent, ja que de fet el model és, com tots, una simplificació de la realitat, i per tant no voldríem que, en modificar el model, s'obtinguessin comportaments totalment diferents.

Tot i que obtenir la llei de potències per a la distribució de S és força rebuscat (al cap i a la fi, cal ajustar el paràmetre p a $1/2$), si considerem altres casos més enllà del binomial, el comportament asimptòtic en el cas crític segueix sent una llei de potències amb exponent $3/2$. Això es pot demostrar fent servir la fórmula de Cauchy en el pla complex i suposant únicament variància finita,¹ vegeu [12, 25]. Per tant, més enllà de la robustesa, s'acostuma a parlar d'universalitat per a referir-se a aquesta invariància.

3 Autoorganització i criticitat

La teoria de la pila de sorra —la criticitat autoorganitzada— és irresistible com a metàfora.

Al Gore

Ara estem en condicions d'acceptar la correspondència entre un procés de ramificació crític i l'ocurrència de terratrèmols, no només qualitativament sinó també, si seguim els comentaris de Kagan [16], quantitativament. Per a fer coincidir el nostre model amb la realitat, simplement hem d'agafar $p = 1/2$ (per al model d'Otsuka binomial), o $m = 1$ (en general), i l'ajustament és realment satisfactori, i de fet podríem finalitzar aquí la nostra cerca d'un model.

Però també podem anar un pas més enllà i preguntar-nos: com és que els sistemes tectònics (i altres geosistemes relacionats amb les catàstrofes naturals) estan sempre en un estat aparentment crític? Pot tractar-se d'una pura coincidència? Per al cas de la reproducció d'éssers vius, hom podria empescar-se un argument de tipus evolucionista. Imaginem una sèrie d'illes, totalment aïllades entre si, i cadascuna habitada per una població que segueix un procés de Galton-Watson, però amb un valor diferent del paràmetre p (o m). Sens dubte,

¹ Aquest resultat, però, no es manté per al cas de variància infinita; vegeu [30].

les illes amb poblacions subcrítiques quedaran desertes al cap de cert nombre de generacions. Pel que fa a les poblacions supercrítiques, o bé s'extingiran o bé explotaran exponencialment, i en aquest cas suposem que la població es col·lapsarà per l'exhauriment dels recursos (aquest ingredient no forma part del model original de Galton-Watson). En el cas crític les poblacions també s'extingiran, però per a algunes (poques) d'aquestes illes la població podrà sobreviure durant molt de temps, moltíssim més que en els altres dos casos. Per tant, al cap d'un cert temps només trobaríem poblacions crítiques, que serien les més adaptades a l'entorn que els hi hem proporcionat.

3.1 Procés de ramificació autoorganitzat

De tota manera, l'escenari evolutiu tot just descrit no es pot aplicar a sistemes tectònics, per als quals quan un procés (el terratrèmol) s'extingeix, tard o d'hora en comença un de nou. La situació dels terratrèmols correspondria, més aviat, a trobar tots els materials magnètics de la Terra al llindar de la magnetització, o equivalentment a trobar cada material a la seva corresponent temperatura de Curie. Aleshores, potser pensàriem que algun mecanisme està forçant la criticitat, fent variar la temperatura en funció de la magnetització i mantenint aquesta al voltant de la transició. En resum, sospitaríem que algun mecanisme de retroalimentació interrelaciona els dos paràmetres [28].

Zapperi *et al.* [35] proposen un model d'aquest tipus. Comencen amb un procés de ramificació estàndard, però introdueixen algunes modificacions importants:

- Limiten el nombre de generacions a un màxim de τ , per tant $0 \leq t \leq \tau$. Això vol dir que després de la generació τ el procés ja no continua.
- Quan el procés s'acaba, bé en arribar a la generació τ bé perquè s'extingeix abans, es torna a generar un procés nou, començant novament amb un únic element, o sigui, $Z_0 = 1$. Aquest procés nou constituirà el que anomenarem una nova realització, que enumerarem amb l'índex T . La clau d'aquest model és que els paràmetres poden canviar de realització en realització. Això es fa de tal manera que quan el procés és subcrític ($m < 1$), la mitjana m del nombre de descendents per element tingui tendència a augmentar; i en canvi quan el procés és supercrític ($m > 1$), la mitjana m tendeixi a disminuir. La idea és transformar el cas crític $m = 1$ en un atractor del sistema.

Com a exemple concret, tornem al nostre cas particular, la distribució binomial amb dos intents de reproducció i una probabilitat p d'èxit associada a cada intent. Com ja sabem, $p < 1/2$, $p = 1/2$ i $p > 1/2$ corresponen als casos subcrític, crític i supercrític, respectivament. La dinàmica proposada per Zapperi *et al.* a [35] està basada en Z_τ , el nombre d'elements a la darrera generació τ . Aquesta dinàmica consisteix a fer variar p de realització en realització mitjançant la fórmula

$$p(T+1) = p(T) + \frac{1 - Z_\tau(p(T), T)}{N},$$

essent T l'índex discret que compta el nombre de realitzacions del procés (i que cal no confondre amb t) i N un número molt gran ($N \gg \tau$ de moment). Per tant, si el procés s'extingeix abans d'arribar a la darrera generació possible, Z_τ és 0 i el paràmetre p augmenta en $1/N$, una quantitat molt petita en el límit $N \rightarrow \infty$. Per altra banda, si el nombre d'elements a la generació τ és més gran que 1, p disminueix en $(Z_\tau - 1)/N$.

Sabent que el valor esperat de Z_τ és m^τ , on m és la mitjana de la distribució de descendència ($m = 2p$ en el nostre cas binomial particular), introduïm ara un terme de soroll η per a tenir en compte les fluctuacions de Z_τ al voltant de la mitjana, és a dir, $\eta = Z_\tau - m^\tau$. Òbviament, $\langle \eta \rangle = 0$ per construcció. Si, per uns moments, ignorem el terme de soroll a l'equació de $p(T + 1)$, la part determinista és

$$p(T + 1) = F(p(T)) = p(T) + \frac{1 - (2p(T))^\tau}{N}.$$

Això no és més que un sistema dinàmic discret, o un mapa [2], que té un punt fix donat per la solució de $p^* = F(p^*)$ que resulta ser $p^* = 1/2$. A més a més, el punt fix és un atractor [2], ja que $|F'(p^*)| < 1$, pel fet que $\tau \ll N$.

Per a N molt gran el terme de soroll η/N tindrà un efecte negligible, i per tant el sistema estocàstic evolucionarà cap al punt fix previst per la part determinista, més algunes petites fluctuacions aleatòries entorn seu. Noteu que aquest punt fix correspon al punt crític del procés de ramificació. L'evolució espontània d'un sistema cap a un estat amb una certa estructura o ordre s'anomena autoorganització i hi ha exemples ben coneguts (els patrons de convecció als fluids o l'autoregulació dels mercats). En el nostre cas parlem de procés de ramificació autoorganitzat; més endavant veurem quin ordre o estructura està associat a l'estat crític.

De tota manera, s'ha de pagar un preu per obtenir criticitat de manera espontània. Com que el procés s'interromp a la generació τ , la distribució de la grandària del procés, $P(S = s)$, ja no serà exactament una llei de potències, tot i que el procés sigui crític, sinó que tindrem desviacions pels valors més grans de s . Fins i tot, si τ fos molt petit, la distribució resultant tindria poc a veure amb una llei de potències. No obstant això, fent τ prou gran ens podem aproximar tant com vulguem a la llei de potències.

Resumint, el que Zapperi *et al.* van introduir és un procés de ramificació que s'autoorganitza cap a un estat crític, tot i que la dinàmica que proposen sembla més aviat arbitrària. Correspondria, en l'exemple de les illes, a tenir un déu creador que, quan una població s'extingeix, en crea una altra però modificant adequadament la seva taxa de reproducció, fins a acabar arribant a una població crítica, o sigui, en equilibri entre l'extinció i l'explosió demogràfica. Ara bé, com es podria implementar aquest tipus de control global (que fa canviar els paràmetres p de tots els elements alhora) en un sistema real, on hom espera que les interaccions entre elements siguin purament locals i no hi hagi cap controlador omniscient?

3.2 Criticitat autoorganitzada

El procés de ramificació autoorganitzat de Zapperi *et al.* de fet s'emmarca de manera natural en la noció de criticitat autoorganitzada, creada per Per Bak i els seus col·laboradors als anys vuitanta del segle passat [4, 14, 6]. Tot i que ara no és rellevant per als nostres propòsits, val la pena dir que aquests autors no estaven interessats en el problema de les lleis de potències en desastres naturals (ja que no el coneixien), sinó que els preocupaven altres problemes similars en física de la matèria condensada com ara les ones de densitat de càrrega, el soroll del tipus « $1/f$ » i la ubiqüitat de les estructures fractals a la natura. Però avui dia la criticitat autoorganitzada és molt més acceptada com a explicació de fenòmens catastròfics (tant a geociència com per a les flamarades solars, l'extinció de les espècies, etc. [4]) que pel que va ser originalment proposada. Llavors, malgrat el desconeixement inicial dels autors, aquests van trobar un mecanisme molt factible per reproduir l'estadística dels desastres naturals. Com hem vist al llarg d'aquest article, sembla que la falta d'informació és una característica comuna en l'evolució de la ciència.

Per a il·lustrar les seves idees, Bak *et al.* van utilitzar la metàfora de la pila de sorra. Hem de reconèixer que la pila de sorra amb la qual tractarem nosaltres és una mica esotèrica; més endavant justifiarem per què i quan pot representar una pila de sorra real. Considerem un sistema format per un gran nombre de cel·les, on cada cel·la pot emmagatzemar un cert nombre de paquets discrets (o partícules), de manera que quan se supera aquest màxim alguns paquets es distribueixen entre els veïns (de moment no cal entrar en detalls, però per veïns entendrem les cel·les més properes a una donada). La situació és anàloga al que passa a les oficines d'un ministeri o una conselleria: cada buròcrata té una sèrie de documents o papers (els paquets) a la seva taula, però quan el nombre de documents és massa gran, decideix solucionar-ho simplement passant alguns dels documents als companys de les taules del costat, i així successivament (vegeu figura 10). Inesperadament, aquest comportament tan senzill donarà lloc a una dinàmica molt interessant.

Per tal de concretar una mica, considerem un reticle hipercúbic en d dimensions on cada cel·la pot emmagatzemar només un paquet; si arriba un segon paquet, la cel·la reenviarà els dos paquets a altres cel·les, escollides aleatòriament i independent entre els $2d$ veïns més propers (que seran les cel·les adjacents). Si, després d'aquest procés, el nombre de paquets encara és superior a 1 (cosa que pot passar si la cel·la havia rebut més d'un paquet), el procés es repeteix. Totes les cel·les duen a terme aquest procés de manera simultània, és a dir, seguint un rellotge comú que marca el temps t , el que es coneix com a actualització en paral·lel. A més a més, el sistema és obert: pot haver-hi una pèrdua de paquets cap a l'exterior (fora del reticle). Això passa quan una cel·la de la frontera selecciona com a destí d'un paquet una altra cel·la que està fora dels límits del sistema; en el cas dels buròcrates tenim el mateix quan algú d'ells llença un document per la finestra.

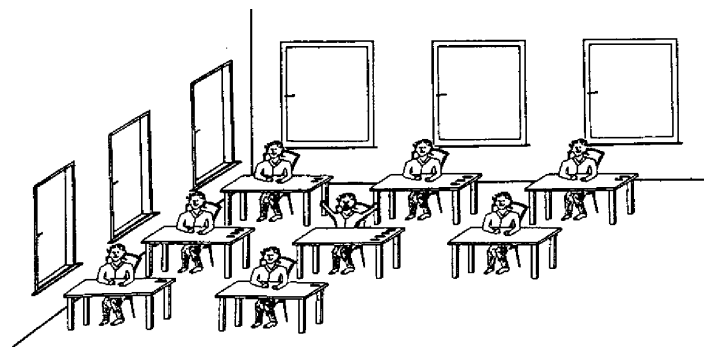


FIGURA 10: Il·lustració del model de pila de sorra entès com una paròdia de la burocràcia. Del llibre de Bak [4].

Òbviament, aquest procés pot engegar una allau de transferències de paquets, que només s'atura quan totes les cel·les tenen un paquet com a molt. Quan s'arriba a aquest punt, el sistema és pertorbat afegint un paquet addicional a una cel·la escollida de manera aleatòria, cosa que reactiva la dinàmica, o no. Mentre no hi hagi activitat (totes les cel·les estan per sota del llindar) es van afegint paquets a cel·les aleatòries. D'aquesta manera es defineix una nova escala temporal, que denotarem per T (tal com fèiem a la subsecció anterior); o sigui, T compta el nombre de paquets afegits. Notem que tenim dues escales temporals ben separades: l'escala ràpida, assenyalada per t , que compta els passos de l'allau, i l'escala lenta, marcada per T .

Les regles tot just descrites verbalment poden també expressar-se matemàticament, és clar. Siguin j, k, n , vectors que identifiquen les cel·les al reticle d -dimensional i sigui z_j la quantitat de paquets continguts a la cel·la j . A més, $nn(j)$ representa dos veïns aleatoris de la cel·la j , triats uniformement i independent entre els $2d$ veïns més propers; per la seva banda, rand representa una cel·la del reticle triada aleatòriament, de manera uniforme sobre tot el reticle. Les tries aleatòries s'actualitzen a cada pas, de manera independent. Les fletxes fines indicaran que una variable passa a prendre un altre valor, tal com es programaria en un ordinador amb el signe d'igualtat. Llavors les regles són:

$$\begin{aligned} \text{si } z_j \geq 2 & \Rightarrow \begin{cases} z_j \rightarrow z_j - 2, \\ z_{nn(j)} \rightarrow z_{nn(j)} + 1, \end{cases} \\ \text{si } z_k < 2 \ \forall k & \Rightarrow z_n \rightarrow z_n + 1 \text{ amb } n = \text{rand}, \end{aligned}$$

que es poden iterar *ad infinitum*. La primera regla, la de la relaxació, defineix l'escala de temps ràpida, donada per t , mentre que la segona, la de l'addició, defineix l'escala lenta, donada per T . L'existència de dues escales de temps fa farragosa la notació i per això prescindim d'etiquetes temporals. Repetim que la regla de relaxació s'ha d'aplicar en paral·lel, simultàniament, a totes les cel·les j que verifiquin la condició llindar.

Aquestes regles defineixen un autòmat cel·lular: un sistema dinàmic on l'espai, el temps i la variable definida sobre aquests són tots discrets; aquests autòmats poden donar lloc a comportaments d'una gran complexitat. De fet, ens trobem davant d'un sistema complex, en el sentit que està constituït per molts elements (les cel·les) que interaccionen entre si de tal manera que el comportament col·lectiu, de tot el sistema, serà més que la simple suma dels comportaments individuals, com ja veurem. Tenim exemples de sistemes complexos en gairebé qualsevol estructura realment interessant: la cèl·lula, el cervell, els ecosistemes, l'economia, les xarxes socials, el clima... La ciència emergent dels sistemes complexos tracta d'aportar una nova perspectiva a l'estudi d'aquesta mena de sistemes. Hom pot endevinar que es tracta d'una disciplina clarament transversal.

Tornant al nostre model, seguint les seves regles senzilles, el nombre total de paquets al sistema evoluciona de la manera següent, entre una pertorbació T i la següent $T + 1$:

$$M(T + 1) = M(T) + 1 - \text{drop}(T),$$

on «drop» és el nombre de paquets que el sistema expulsa. És a dir, entre cada addició de paquets i la següent, la massa M del sistema s'incrementa pel paquet que hem afegit i disminueix pel nombre de paquets que surten per la frontera durant l'allau (si aquesta té lloc). El paràmetre central d'aquest model és p , definit aquí per a cada cel·la com la probabilitat de tenir un sol paquet (just abans d'afegir un paquet, o sigui, quan la transferència de paquets ha cessat). Veurem com p es relaciona amb M . En un principi, p depèn de la posició de cada cel·la al reticle (les que estan més a prop del contorn tindran una probabilitat diferent de les que no ho estan) i hauríem d'afegir-li un índex espacial.

No obstant això, per a poder tractar matemàticament el sistema, treballarem en l'anomenada aproximació de camp mitjà [6], on veurem que p esdevé un paràmetre genèric de tot el sistema. En realitat, l'aproximació de camp mitjà, més que una aproximació és una redefinició del sistema, que fa canviar alguna característica d'aquest però sense alterar-ne l'essència. Ara ho veurem. Una manera d'implementar el camp mitjà és considerar que el reticle d -dimensional és de dimensió infinita, o sigui, en el límit $d \rightarrow \infty$ (tot i que el sistema que ens interessi pugui tenir $d = 2$, com a la figura 10). Una altra opció és suposar que els veïns no són els més propers a la cel·la sinó qualsevol cel·la triada aleatòriament entre totes les del sistema, i s'actualitzen aquestes tries aleatòries cada vegada. Ambdues eleccions són equivalents perquè la propagació dels paquets al sistema no formarà bucles: la probabilitat que un paquet torni a la cel·la d'on venia tendeix a zero en aquests dos casos (si el sistema és suficientment gran en el cas de triar la versió de veïns aleatoris); igualment, la probabilitat que dos paquets arribin a la mateixa cel·la tendirà a zero.

Llavors, en l'aproximació de camp mitjà no hi ha correlació entre l'estat de les cel·les, i aquestes són equivalents, i per tant la probabilitat que una cel·la qualsevol contingui un paquet vindrà donada pel nombre de paquets M dividit pel nombre de cel·les del sistema, que anomenem aquí N , o sigui, $p = M/N$ (les

cel·les o tenen un paquet o no en tenen cap, quan no hi ha activitat). Aquesta probabilitat, per les regles del model, és igual a la probabilitat que una cel·la deixi anar dos paquets quan en rep un, o sigui, es relaxi. Això es pot considerar un intent de reproducció exitós, però aquesta cel·la no serà la cel·la mare sinó la filla, és a dir, aquesta cel·la serà filla de la cel·la que li va transferir els paquets. La cel·la filla podrà donar lloc a descendència o no, depenent de si les cel·les que després rebin els paquets es relaxin o no. Veiem, doncs, que les relaxacions es propaguen pel sistema com un procés de ramificació binomial amb paràmetre p , i amb només 0, 1 o 2 filles. Si dividim l'equació de la massa al sistema per N , obtenim

$$p(T + 1) = p(T) + \frac{1 - \text{drop}(T)}{N},$$

que és pràcticament idèntica a l'equació introduïda per Zapperi *et al.* [35] en el procés de ramificació autoorganitzat de la subsecció anterior, i que ens diu que, en aquest model de camp mitjà, la probabilitat de reproducció en cada intent evoluciona d'aquesta manera (a l'escala de temps lenta). O sigui, en una allau les relaxacions es propaguen com un procés de ramificació però, a més a més, entre allau i allau, el paràmetre p canvia de la manera proposada per Zapperi i els seus col·laboradors. Cal remarcar, però, que això s'ha aconseguit sense actuar globalment sobre totes les cel·les. És tot el sistema el que regula el seu propi valor de p , a través del balanç entre l'addició de paquets i la seva sortida pels contorns.

Tal com hem analitzat a la subsecció anterior, el sistema tendirà, excepte per a petites fluctuacions, a un estat en el qual el nombre mitjà de paquets que surtin sigui $\langle \text{drop} \rangle = 1$. Llavors, a l'aproximació de camp mitjà hem d'implementar o redefinir les condicions de contorn de tal manera que el punt crític correspongui a aquesta situació. Simplement podem agafar la mateixa regla que Zapperi *et al.*, que és que les allaus es dissipin espontàniament després d'un nombre fixat τ de passos de temps. O sigui, les cel·les que es relaxen a la generació τ envien els seus paquets fora del sistema. Això fa que $\langle \text{drop} \rangle = 2\langle Z_\tau \rangle = 2m^\tau = 1$, que dóna $m = 1/2^{1/\tau}$ i que tendeixi al punt crític $m = 1$ quan τ tendeix a infinit. De tota manera, aquesta tria per a les condicions de contorn no és l'única possible.

Així doncs, l'aproximació de camp mitjà ens permet relacionar el models de pila de sorra amb un procés de ramificació crític, i per tant, la distribució de la grandària de les allaus a aquesta versió de la pila seguirà una llei de potències, amb exponent $3/2$. De fet, com hem dit, esperem alguna petita desviació respecte a aquest comportament, a causa dels efectes introduïts per les condicions de contorn, que equivalen a tenir una grandària del sistema finita. Llavors, si el sistema és finit, no podem tenir allaus arbitràriament grans, però ens hi podem acostar molt. Per al model de pila de sorra original, sense fer l'aproximació de camp mitjà (amb interaccions locals i amb dimensió petita), els resultats seran diferents. Però simulacions per ordinador mostren que el camp mitjà dóna una explicació qualitativa del comportament de la pila; en particular, s'obté normalment una distribució de llei de potències però amb exponent diferent de $3/2$. A més, les regles d'interacció local donen lloc a correlacions

espacials i a estructures, i per això té sentit parlar d'una autoorganització cap a la criticitat, per l'existència precisament d'aquestes estructures al sistema.

3.3 Models de piles de sorra

Hem parlat tota l'estona de piles de sorra, però què té a veure la transferència de paquets descrita amb una pila real? La clau és que els paquets que es transfereixen no són grans de sorra, sinó unitats de pendent d'una pila bidimensional. Si j és un índex de posició que va d'1 a L (on L és la grandària lineal del sistema), definim l'alçada de la pila a la posició j com a $h_j = h_{j+1} + z_j$, començant pel valor de j més gran amb $h_L = z_L$. Recordem que z_j era el nombre de paquets a la posició j , i ara resulta que esdevé el pendent de la pila en aquesta posició. Fem notar que sent la pila bidimensional (vegeu figura 11), les variables z_j i h_j estan definides sobre una dimensió, i per tant, $d = 1$.

Per tenir l'equivalència amb una hipotètica pila de sorra cal encara una petita modificació de les regles: en comptes que quan una cel·la j es relaxa aquesta envia dos paquets a veïns triats aleatòriament, ara fem que s'envii un paquet al veí $j - 1$ i un altre al $j + 1$, per tant, $nn(j)$ s'ha de redefinir com a $nn(j) = j \pm 1$ (aquest canvi no altera el comportament de camp mitjà del model, perquè a camp mitjà es redefeixen els veïns). Llavors, és immediat comprovar que les regles resulten ser les següents:

$$\begin{aligned} \text{si } h_j - h_{j+1} \geq 2 & \Rightarrow \begin{cases} h_j \rightarrow h_j - 1 \\ h_{j+1} \rightarrow h_{j+1} + 1 \end{cases} \\ \text{si } h_k - h_{k+1} < 2 \quad \forall k & \Rightarrow h_m \rightarrow h_m + 1 \text{ per a } m \leq n \text{ amb } n = \text{rand}. \end{aligned}$$

Tenim llavors un autòmat cel·lular que representa una pila de grans de tal manera que quan el pendent a j és més gran o igual que 2, un gra salta de j a $j + 1$ (cap a la dreta, segons la figura). Noteu que per construcció del model mai arribarem a la situació simètrica, pendent més petit o igual a -2 , i així el flux de grans sempre serà cap a valors de j més grans, o sigui, d'esquerra a dreta. La condició de contorn oberta per al pendent z a $j = L$ no dona una condició de contorn creïble per a h , i és més convenient canviar-la. Per tenir la situació experimental d'una pila oberta per la dreta (segons la figura), donada per $h_{L+1} = 0$ resulta que obtenim per a la relaxació a $j = L$ la regla $z_L \rightarrow z_L - 1$ (el pendent passaria a conservar-se al contorn dret). De fet, aquesta condició ja estava implícita a la tria $h_L = z_L$.

Un altre canvi possible al model pot ser afegir només un gra de sorra durant l'addició (en comptes d'un paquet, o sigui, una unitat de pendent); això és, $h_n \rightarrow h_n + 1$ i llavors $z_n \rightarrow z_n + 1$ però amb $z_{n-1} \rightarrow z_{n-1} - 1$. Existeixen moltíssimes variants d'aquestes regles que defineixen diferents models de piles de sorra, a vegades amb poca connexió amb el que hauria de ser una pila de sorra real. Recordem, al final, que aquests models pretenen ser en el fons una metàfora de l'aparició espontània de criticitat a la natura, i en principi no hi ha un interès específic a estudiar *per se* els medis granulars. Això seria una altra història.

Aquests models poden ser útils per descriure un altre tipus de fenomen: el creixement de superfícies (per exemple, un fluid que penetra en un altre medi). Si fem que la variable H_j compti el nombre total de relaxacions a la posició j (des de l'instant inicial) i si la condició inicial de la pila és buida ($h_j = 0$ per a tot j) i l'addició de grans es fa només a $j = 1$, llavors la variable H_j defineix l'avenç d'una interfase estirada des de $j = 1$. El gradient d'aquesta interfase dóna l'alçada de la pila, això és, $h_j = H_{j-1} - H_j$, amb $H_0 = T$, o sigui, el nombre total de grans afegits. Amb aquest tema podríem seguir molt més però se'ns acaba l'espai i el temps...

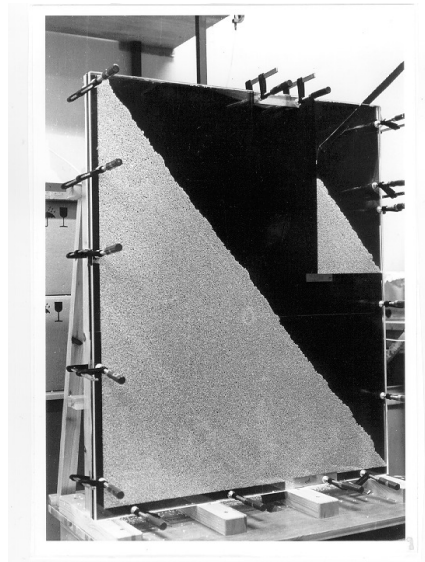


FIGURA 11: La «metàfora» de la pila de sorra, per al cas bidimensional, s'ha arribat a estudiar experimentalment. La instal·lació de la fotografia (cortesia de K. Christensen) utilitza dos plafons per a constrenyir la pila (de fet, dues piles), i arròs en comptes de sorra.

4 Conclusions

Hem començat aquest article mostrant algunes propietats estadístiques interessants de l'ocurrència de terratrèmols, i hem acabat jugant amb piles de sorra d'infinites dimensions que modelen la criticitat autoorganitzada. I, mentrestant, hem tingut temps d'aprendre quatre coses dels processos de ramificació. Potser ara és el moment de recapitular, de posar els continguts en perspectiva i d'esbossar algunes conclusions per al nostre objecte d'estudi inicial: els desastres naturals.

D'entrada, sense fer referència a cap model, només mirant les dades ja podem dir força coses: els terratrèmols i altres desastres naturals segueixen una distribució tipus llei de potències per la mida de la seva grandària, encara que en alguns casos amb una disminució exponencial afegida a causa de l'efecte de la finitud del sistema (la Terra és finita!). I encara més: per als valors dels exponents que s'han trobat, aquesta distribució implica que els grans esdeveniments, tot i que poc freqüents, són els que més contribueixen a la devastació global.

Pel que fa al model d'Otsuka, hem mostrat com es poden recuperar les propietats estadístiques de l'ocurrència real de terratrèmols (i d'altres desastres naturals) mitjançant un procés estocàstic en cascada raonablement simple per a les dinàmiques locals dels segments de les falles tectòniques, i amb l'ajuda del formalisme matemàtic dels processos de ramificació. És molt important remarcar aquest punt, perquè constitueix un pont entre dues escales observacionals diferents: la microescala de la dinàmica local i la macroescala del comportament estadístic global.

Ara bé, el model d'Otsuka no és més que un cas particular del procés de ramificació de Galton-Watson. És per això que, primerament, hem presentat de manera planera els principals resultats coneguts per a aquest tipus de processos (principals segons els nostres interessos, és clar). Hem explicat com, mitjançant la maquinària de les funcions generatrius, es pot trobar una fórmula per a l'activitat (o població) a qualsevol generació del procés. En el límit d'infinites generacions s'obté la probabilitat d'extinció, que mostra un brusc canvi de comportament entre dos règims clarament diferenciats: extinció segura quan el nombre mitjà de descendents és inferior a 1, i la possibilitat de no extinció quan és superior a 1. També hem obtingut una expressió per a la probabilitat de la mida total del procés, és a dir, la població que ha nascut en total, o, equivalentment, l'energia total radiada per un terratrèmol. És justament a la frontera d'aquests dos règims, és a dir, al punt crític de la transició de fase, on s'obtenen distribucions compatibles amb les dades reals de terratrèmols i altres fenòmens. En el nostre cas, apareix una distribució de potències amb exponent $3/2$; però llavors cal explicar quin mecanisme seria el responsable de conduir la Terra cap a aquest estat crític.

En aquest sentit, hem mostrat com es pot transformar el punt crític en un atractor del sistema, fent servir un mecanisme de retroalimentació força senzill. Cal que una condició global, relacionada amb la dissipació a la frontera, actui sobre la probabilitat d'activació, de manera que quan aquesta probabilitat és massa baixa, augmenti, i quan és massa alta, disminueixi. Els models de piles de sorra, en el límit ideal d'infinites dimensions, implementen de manera natural aquest mecanisme mitjançant el transport de partícules a través del sistema fins a la frontera, on es dissipen. El nombre de partícules regula l'activitat del sistema.

Finalment, cal comentar que la gènesi de sistema complex que hem explicat (començant per un simple procés de ramificació i complicant-ho fins a arribar a un model de pila de sorra amb molts elements que actuen localment) no constitueix la manera natural com es desenvolupen aquestes idees. Més aviat

és al contrari; o ni tan sols això, més aviat no es pot fer la connexió entre un sistema complex i una dinàmica simple. En general, per les limitacions inherents que plantegen els sistemes complexos, els models en aquest camp no poden ser més que una caricatura de les interaccions reals al sistema. Tot i això, només imposant a més a més l'aproximació de camp mitjà hom pot establir la connexió amb un sistema simple. Però l'aproximació de camp mitjà en la majoria dels casos resulta estar ben allunyada del model inicial, almenys quantitativament. Resoldre models reticulars, amb interaccions no globals, és terriblement complicat, i ara mateix els investigadors s'han de refiar de simulacions numèriques, ja que no hi ha resultats analítics exactes disponibles, excepte comptades excepcions (un conjunt de mesura nul·la, segurament). Però també és cert que això fa encara més interessants els problemes matemàtics que plantegen aquests sistemes. Sens dubte, els investigadors encara se n'hauran d'ocupar durant dècades!

A Apèndix

A.1 Dissipació d'energia a les escales més grans

Considerem una distribució de potències contínua, definida, per simplificar però sense pèrdua de generalitat, entre 1 i ∞ , amb funció de densitat

$$D(x) \propto \frac{1}{x^\alpha}.$$

Demostrarem que, donat $r > 2$, existeixen valors de α tals que la contribució d'un interval $1 \leq x < c$ al valor esperat de x és sempre menor que la contribució de $c \leq x < rc$, independentment de la grandària de c .

La contribució de l'interval $a \leq x < c$ al valor esperat de x és

$$\int_a^c x D(x) dx \propto c^{2-\alpha} - a^{2-\alpha},$$

i, per tant,

$$\int_c^{rc} x D(x) dx \propto c^{2-\alpha}(r^{2-\alpha} - 1).$$

Per tal que la darrera integral sigui més gran que l'anterior serà suficient demanar que

$$(r^{2-\alpha} - 1)c^{2-\alpha} > c^{2-\alpha}.$$

Per tant, $r^{2-\alpha} > 2$ i això implica que

$$\alpha < 2 - \log_r 2.$$

Per a $r = 10$, la condició suficient resulta ser $\alpha < 1.699$. En el cas de l'energia radiada pels terratrèmols, $\alpha \simeq 1 + 2b/3 \simeq 1.667$, i per tant la condició es compleix. Això sí, valors de α lleugerament superiors violarien la condició.

Tot i això, la tria de $r = 10$ no té res d'especial (no és cap número màgic!) i la condició es compleix per a valors de r més grans. Per a $r = 2$ la condició dictaria que $\alpha < 1$, cosa que no és un exponent acceptable per a una llei de potències (no seria normalitzable).

A.2 Demostració rigorosa de la probabilitat d'extinció

Més enllà d'arguments gràfics (vegeu la figura 5), volem donar una prova totalment rigorosa del càlcul de la probabilitat d'extinció en un procés de Galton-Watson, que ve donada per

$$P_{\text{ext}} = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(0),$$

on P_{ext} només està ben definida quan el límit existeix. Per a veure que això sempre passa, observem que $Z_t = 0 \implies Z_{t+1} = 0$. Per tant, $\{Z_t = 0\} \subset \{Z_{t+1} = 0\}$ i $P(Z_t = 0) \leq P(Z_{t+1} = 0)$, i per tant $f^t(0) \leq f^{t+1}(0)$ o, dit d'una altra manera, (f^t) és una successió creixent. Com que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, podem concloure que $f^t(0)$ està fitada i per tant té límit. Per continuar la nostra demostració, serà convenient tractar per separat els casos $m \leq 1$ i $m > 1$.

A.2.1 El cas $m \leq 1$: Com que la funció $f(x)$ és còncava per a $x \geq 0$, sempre està per sobre de qualsevol recta tangent a aquesta [31]. En particular, si considerem la tangent a $f(x)$ pel punt $(1, 1)$, tenim que

$$f(x) > 1 + m(x - 1) > x.$$

Per tant $f(x) > x$ per a $0 \leq x < 1$. És fàcil comprovar, també, que $f(P_{\text{ext}}) = P_{\text{ext}}$,

$$f\left(\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(0)\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(f^t(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} f^{t+1}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(0),$$

i òbviament $0 \leq P_{\text{ext}} \leq 1$. Per tant, tenim que $f(P_{\text{ext}}) = P_{\text{ext}}$ amb $0 \leq P_{\text{ext}} \leq 1$. Resumint, P_{ext} és un punt fix de $f(x)$ a l'interval $[0, 1]$, però $f(x) > x$ (estrictament) a $[0, 1)$. Queda clar, doncs, que l'única opció que resta és $P_{\text{ext}} = 1$.

A.2.2 El cas $m > 1$: En aquest cas, començarem demostrant que $P_{\text{ext}} \neq 1$. Tal com acabem de veure, (f^t) és una successió creixent. A més, com que $f(x)$ és contínua i $f'(1) = m > 1$, tenim que $f(x) < x$ per a $x \in (1 - \epsilon, 1)$ per a un cert $\epsilon > 0$. Per tant, $f^t(0) \notin (1 - \epsilon, 1)$ per a tot t (ja que llavors decreixeria). Això voldria dir que l'única manera en què $f^t(0)$ pot tenir límit 1 seria «saltar per sobre» de l'interval $(1 - \epsilon, 1)$, és a dir, mitjançant un $y < 1 - \epsilon$ tal que $f(y) = 1$. Però aquest y no pot existir, perquè aleshores $f'(x) < 0$ en algun punt entre y i 1.

A continuació veurem que l'equació $f(x^*) = x^*$ té una única solució a l'interval $[0, 1)$. Ja sabem que hi ha d'haver, com a mínim, una solució, ja que $f(0) > 0$, i $f(x) < x$ a $(1 - \epsilon, 1)$ (aquí usem el teorema de Boltzano per a $f(x) - x$).

Per a veure que la solució és única, suposem que n'hi ha dues, $0 \leq x_1 < x_2 < 1$. Com que $f(1) = 1$, el teorema de Rolle implicaria que existeixen dos punts, y_1, y_2 , tals que $f'(y_1) = f'(y_2) = 1$ i $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < 1$. Però això és impossible ja que $f''(x) \geq 0$ a $[0, 1]$, i per tant $f'(x)$ és creixent i injectiva a $[0, 1]$.

Per tant, si $P_{\text{ext}} \neq 1$ però $f(P_{\text{ext}}) = P_{\text{ext}}$, aleshores P_{ext} ha de ser l'única solució de $f(x^*) = x^*$ a $[0, 1]$.

Si volguéssim ser totalment rigorosos, hauríem de tractar per separat alguns casos patològics, però ho ometrem perquè són sempre situacions sense interès real. Per exemple, el cas $f(x) = x$ òbviament no té una única solució, i per tant la demostració no s'hi aplica, però correspon a una situació gens interessant: $p_1 = 1$ i $p_k = 0$ per a tot $k \neq 1$. De totes maneres, aquests casos patològics sempre corresponen al cas $p_0 + p_1 = 1$; en cas contrari la concavitat està garantida. Més detalls en general de la demostració d'aquest apèndix es troben a l'article de Jolis [15].

A.3 Els números de Catalan

Els números de Catalan no deuen el seu nom a cap homenatge al nostre país, sinó al matemàtic francobelga del segle XIX Eugène Charles Catalan (tot i que, de fet, és raonable suposar que va tenir algun avantpassat català). Els «seus» números permeten comptar una gran varietat d'objectes [32], incloent-hi els arbres amb arrel que apareixen en l'estudi dels processos de ramificació quan el nombre de branques només pot ser 0, 1 o 2.

Un arbre de mida s es pot descompondre en l'arrel (que correspon a la generació zero) i els restants $s - 1$ nodes. Aquests, al seu torn, es poden classificar segons a quina branca pertanyin, i per tant tenim una quantitat variable de nodes a la primera branca, $0, 1, \dots, s - 1$ i la resta a la segona, $s - 1, s - 2, \dots, 1, 0$ respectivament. Per tant, el nombre d'arbres de mida s , C_s , compleix que,

$$C_s = C_0 C_{s-1} + C_1 C_{s-2} + \dots + C_{s-2} C_1 + C_{s-1} C_0,$$

on prenem $C_0 = 1$, ja que hi ha una sola manera de tenir mida 0. D'aquí obtenim

$$\begin{aligned} C_1 &= (C_0)^2 = 1, \\ C_2 &= 2C_0 C_1 = 2, \\ C_3 &= 2C_0 C_2 + (C_1)^2 = 5, \\ C_4 &= 2C_3 C_0 + 2C_2 C_1 = 14, \end{aligned}$$

i per tant aquesta senzilla recursió genera tots els números de Catalan. Per al lector curiós hem inclòs la figura 12, on es mostren tots els possibles arbres amb arrel amb no més de dues branques per node, fins a la mida 4.

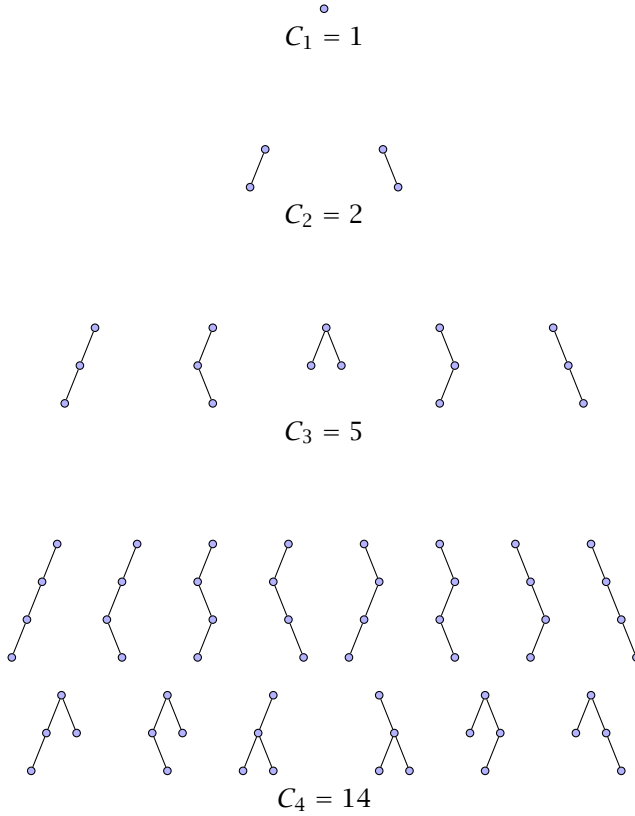


FIGURA 12: Tots els arbres amb arrel amb un màxim de dues branques per node, fins a la mida $s = 4$. El nombre d'arbres de mida s ve donat per C_s , l' s -èsim número de Catalan.

Ara bé, si el que busquem és una forma explícita per a C_s , caldrà definir-ne la funció generatriu

$$h(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} C_s x^s.$$

És possible obtenir una expressió per a $h(x)$ fent servir només les propietats dels números de Catalan. El truc consisteix a calcular *el quadrat* de $h(x)$:

$$\begin{aligned} [h(x)]^2 &= \left[\sum_{s=0}^{\infty} C_s x^s \right]^2 = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j} = \sum_{s=0}^{\infty} \underbrace{\left[\sum_{i+j=s} C_i C_j \right]}_{C_{s+1}} x^s = \\ &= \frac{1}{x} \sum_{s=0}^{\infty} C_{s+1} x^{s+1} = \frac{h(x) - C_0}{x}, \end{aligned}$$

i, fent servir que $C_0 = 1$, arribem a

$$h(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Una d'aquestes dues funcions (segons el signe de $\pm$) ha de ser, per tant, la funció generatriu dels números de Catalan. El que pretenem ara és, simplement, recuperar aquests números a partir de la seva funció generatriu. Fent servir el desenvolupament de Taylor de $\sqrt{1 - x}$ al voltant de $x = 0$ i substituint a $h(x)$ és fàcil veure que només el signe menys pot correspondre a la funció generatriu, i per tant

$$h(x) = 1 + \frac{1}{2x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(2s-1)!!2^{s+1}}{(s+1)!} x^{s+1} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(2s-1)!!2^s}{(s+1)!} x^s,$$

d'on obtenim la nostra primera expressió explícita per als números de Catalan,

$$C_s = \frac{(2s-1)!!2^s}{(s+1)!} \quad \text{per a } s \geq 1.$$

Si volem una expressió més agradable, podem fer servir que

$$(2s)! = (2s)!!(2s-1)!! = s!2^s(2s-1)!!,$$

i aleshores arribem a

$$C_s = \frac{(2s)!}{s!(s+1)!} = \frac{1}{s+1} \binom{2s}{s},$$

que és l'expressió més habitual per als números de Catalan, vàlida ara per a tot $s \geq 0$.

A.4 Normalització i no-normalització de la distribució de la mida total

Passem ara a il·lustrar com la distribució de la mida total del procés, $P(S = s)$, està normalitzada només en els casos subcrític i crític. Per a la distribució del nombre de descendents utilitzarem com a exemple la distribució binomial amb $k = 0, 1$ i 2 . A la secció 2.9 hem vist que

$$P(S = s) = \frac{1}{s+1} \binom{2s}{s} p^{s-1} (1-p)^{s+1} \quad \text{amb } s = 1, 2, \dots$$

Fent servir la funció generatriu dels números de Catalan, és possible comprovar que aquesta expressió només està normalitzada per a $p \leq 1/2$, però no per $p > 1/2$. Per a veure-ho, considerem novament la funció generatriu dels números de Catalan, que acabem d'obtenir a la secció anterior de l'apèndix:

$$h(x) = \sum_{s=0}^{\infty} C_s x^s = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Aleshores, introduint $q = 1 - p$,

$$\sum_{s=1}^{\infty} P(S = s) = \frac{q}{p} \sum_{s=1}^{\infty} C_s(pq)^s = \frac{q}{p} (h(pq) - 1),$$

i fent servir l'expressió per a $h(x)$, resulta

$$h(pq) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq}}{2pq} = \frac{1 - \sqrt{(1 - 2p)^2}}{2pq} = \frac{1 - |1 - 2p|}{2pq}.$$

Ara podem distingir dos casos. El primer, $p \leq 1/2$, per al qual

$$h(pq) - 1 = \frac{1}{q} - 1 = \frac{p}{q} = \frac{\min\{p, q\}}{\max\{p, q\}},$$

i per al cas contrari, $p \geq 1/2$, és

$$h(pq) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p} = \frac{\min\{p, q\}}{\max\{p, q\}}.$$

Conseqüentment,

$$\sum_{s=1}^{\infty} P(S = s) = \frac{q}{p} \cdot \frac{\min\{p, q\}}{\max\{p, q\}} = \begin{cases} 1 & \text{per a } p \leq 1/2 \\ \left(\frac{q}{p}\right)^2 & \text{per a } p \geq 1/2 \end{cases},$$

cosa que ens recorda el nostre resultat sobre la probabilitat d'extinció per al cas binomial

$$\sum_{s=1}^{\infty} P(S = s) = P_{\text{ext}},$$

expressió que clarament no està normalitzada per a $p > 1/2$. També és possible arribar als mateixos resultats fent servir $g(x)$, la funció generatriu de la mida total de la població, però deixem aquest càlcul com a exercici per al lector.

Agraïments

Voldríem dedicar aquest treball al pintoresc científic Per Bak, coincidint amb el 25è aniversari de la seva invenció de la criticitat autoorganitzada, i amb el 10è aniversari de la seva prematura mort. Aquest article neix, en part, de la *Lorenz Lecture* que un dels autors va donar l'any 2011 al *Fall Meeting* de l'American Geophysical Union. En relació amb això, donem les gràcies a Armin Bunde, i també a Tom Davis, per penjar les seves notes sobre els números de Catalan públicament a internet, a Anna Deluca i Gunnar Pruessner pels seus comentaris interessants, a Cecília M. Clos per assistir-nos en l'edició gràfica i a Josep Maria Font i Rosalba García per l'ajut en la traducció al català. Aquest treball ha estat finançat pel Ministerio de Ciencia y Tecnología (FIS2009-09508), el Ministerio de Economía y Competitividad (FIS2012-31324) i la Generalitat de Catalunya (2009-SGR-164), que també finança Francesc Font-Clos a través de la beca 2012FI_B 00422.

Referències

- [1] ABRAMOWITZ, M; STEGUN, I. A. (ed). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Washington, DC: U.S. Government Printing Office, 1964. (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series; 55)
- [2] ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos. An introduction to dynamical systems*. Nova York: Springer-Verlag, 1997. (Textbooks in Mathematical Sciences)
- [3] ASCHWANDEN, M. J. «SOC systems in astrophysics». A: ASCHWANDEN, M. J. (ed). *Self-Organized Criticality Systems*. Berlín: Open Academic Press, 2013, 439-478.
- [4] BAK, P. *How nature works. The science of self-organized criticality*. Nova York: Copernicus, 1996.
- [5] BURROUGHS, S. M.; TEBBENS, S. F. «Power-law scaling and probabilistic forecasting of tsunami runup heights». *Pure Appl. Geophys.*, 162 (2005), 331-342.
- [6] CHRISTENSEN, K.; MOLONEY, N. R. *Complexity and criticality*. Londres: Imperial College Press, 2005. (Imperial College Press Advanced Physics Texts; 1)
- [7] CORRAL, A.; FONT-CLOS, F. «Criticality and self-organization in branching processes: application to natural hazards». A: ASCHWANDEN, M. J. (ed). *Self-organized criticality systems*. Berlín: Open Academic Press, 2013, 183-228.
- [8] CORRAL, A.; OSSÓ, A.; LLEBOT, J. E. «Scaling of tropical-cyclone dissipation». *Nature Phys.*, 6 (2010), 693-696.
- [9] FREEMAN, M. P.; WATKINS, N. W. «The heavens in a pile of sand». *Science*, 298 (2002), 979-980.
- [10] GRIMMETT, G. R.; STIRZAKER, D. R. *Probability and random processes*. 3a ed. Nova York: Oxford University Press, 2001.
- [11] GUTENBERG, B.; RICHTER, C. F. «Frequency of earthquakes in California». *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 34 (1944), 185-188.
- [12] HARRIS, T. E. *The theory of branching processes*. Berlín: Springer-Verlag, 1963. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 119)
- [13] HAWKINS, D.; ULAM, S. «Theory of multiplicative processes I». LANL report, LA - 171.
- [14] JENSEN, H. J. *Self-organized criticality. Emergent complex behavior in physical and biological systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. (Cambridge Lecture Notes in Physics; 10)
- [15] JOLIS, M. «Desapareixerà el teu cognom?». *MATerials MATemàtics*, treball núm. 4 (2010), 29 p.
- [16] KAGAN, Y. Y. «Earthquake size distribution: Power-law with exponent $\beta \equiv 1/2$?» *Tectonophys.*, 490 (2010), 103-114.

- [17] KANAMORI, H.; BRODSKY, E. E. «The physics of earthquakes». *Rep. Progr. Phys.*, 67 (8) (2004), 1429-1496.
- [18] KANAMORI, H.; MORI, J. «Microscopic processes on a fault plane and their implications for earthquake dynamics». A: *Problems in geophysics for the new millennium*. Bolònia: Editrice Compositori, 2000, 73-88.
- [19] MALAMUD, B. D. «Tails of natural hazards». *Phys. World*, 17 (8) (2004), 31-35.
- [20] MALAMUD, B. D.; MILLINGTON, J. D. A.; PERRY, G. L. W. «Characterizing wildfire regimes in the United States». *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 102 (2005), 4694-4699.
- [21] MCCLELLAND, L.; SIMKIN, T.; SUMMERS, M.; NIELSEN, E.; STEIN, T. C. (ed.) *Global volcanism 1975-1985*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.
- [22] NEWMAN, M. E. J. «Power laws, Pareto distributions and Zipf's law». *Cont. Phys.*, 46 (2005), 323-351.
- [23] OTSUKA, M. «A simulation of earthquake occurrence part 2. Magnitude-frequency relation of earthquakes». *Zisin*, 24 (1971), 215-227. [En japonès]
- [24] OTSUKA, M. «A chain-reaction-type source model as a tool to interpret the magnitude-frequency relation of earthquakes». *J. Phys. Earth*, 20 (1972), 35-45.
- [25] OTTER, R. «The multiplicative process». *Ann. Math. Statistics*, 20 (1949), 206-224.
- [26] PAPOULIS, A. *Probability, random variables, and stochastic processes*. 2a ed. Nova York: McGraw-Hill Book Co., 1984. (McGraw-Hill Series in Electrical Engineering. Communications and Information Theory)
- [27] PETERS, O.; DELUCA, A.; CORRAL, A.; NEELIN, J. D.; HOLLOWAY, C. E. «Universality of rain event size distributions». *J. Stat. Mech.*, P11030.
- [28] PRUESSNER, G.; PETERS, O. «Self-organized criticality and absorbing states: Lessons from the Ising model». *Phys. Rev. E*, 73 (2006), 025106(R).
- [29] ROSS, S. M. *A first course in probability*. 2a ed. Nova York: MacMillan Publishing Co., 1984.
- [30] SAICHEV, A.; HELMSTETTER, A.; SORNETTE, D. «Power-law distributions of offspring and generation numbers in branching models of earthquake triggering». *Pure Appl. Geophys.*, 162 (2005), 1113-1134.
- [31] SPIVAK, M. *Calculus*. Berkeley, Califòrnia: Publish or Perish, Inc., 1980.
- [32] STANLEY, R. P. *Enumerative combinatorics*. Vol. 2. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 62)
- [33] ULAM, S. M. *Adventures of a mathematician*. Nova York: Charles Scribner's Sons, 1976.
- [34] WATSON, H. W.; GALTON, F. «On the probability of the extinction of families». *J. Anthropol. Inst. Great Britain*, 4 (1875), 138-144.

- [35] ZAPPERI, S.; LAURITSEN, K. B.; STANLEY, H. E. «Self-organized branching processes: Mean-field theory for avalanches». *Phys. Rev. Lett.*, 75 (1995), 4071-4074.

CENTRE DE RECERCA MATEMÀTICA I
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES DE LA UAB
EDIFICI C, CAMPUS BELLATERRA
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
08193 BELLATERRA, BARCELONA
{acorral,fontclos}@crm.cat

Com les varietats invariants formen espirals i anells en galàxies barrades

MERCÈ ROMERO-GÓMEZ, PATRICIA SÁNCHEZ-MARTÍN I JOSEP J. MASDEMONT

Resum: L'espectacularitat de les galàxies barrades consisteix no solament en la presència de la barra, allargada en el centre de la galàxia, sinó també en els braços espirals o anells que es desenvolupen en les parts exteriors. No hi ha una teoria clara per a la formació d'anells i, fins fa poc, només n'hi havia una que explicava l'origen dels braços espirals en galàxies no barrades. En els darrers anys hem desenvolupat una teoria basada en els sistemes dinàmics que relaciona els braços espirals i els anells amb les varietats invariants hiperbòliques associades a òrbites periòdiques i quasiperiòdiques al voltant de punts d'equilibri colineals del sistema.

Paraules clau: sistemes dinàmics, varietats invariants, estructura i dinàmica de galàxies.

Classificació MSC2010: 37D10, 85A05.

1 Introducció

Des dels temps d'Edwin P. Hubble (1889–1953) que les galàxies es classifiquen segons la seva forma, bàsicament, en el·líptiques i espirals. I dins les espirals, en espirals normals (figura 1 esquerra), on les espirals es formen des del centre de la galàxia, i espirals barrades (figura 1 dreta), on al centre de la galàxia hi ha una sobredensitat allargada en forma de cigar o més o menys el·lipsoïdal, anomenada barra galàctica, i les espirals es formen al final de la barra. Actualment sabem que almenys el 66 % de les galàxies espirals són barrades (Sheth *et al.* [35]), la qual cosa ha impulsat els astrònoms i teòrics a estudiar-ne les característiques a fons. De fet, les galàxies barrades no es caracteritzen només per tenir espirals sinó que moltes d'aquestes presenten anells en lloc d'espirals (vegeu la primera fila de la figura 9).

Dins de les espirals barrades existeix una subclassificació segons si els braços espirals estan molt enrotllats a la barra i presenten un nucli central molt brillant o si són més oberts i el nucli central és molt feble. Són les galàxies de tipus primerenc i de tipus tardà, respectivament.



FIGURA 1: Galàxies espirals. Esquerra: Galàxia espiral normal (no barrada) M 74 (cortesia NASA). Dreta: Galàxia espiral barrada NGC 1300 (cortesia NASA, ESA, i The Hubble Heritage Team STScI/AURA).

Pel que fa als anells, una galàxia en pot presentar múltiples i de diferents tipus segons la classificació morfològica [8, 9, 38]. Un anell intern, r , proper i encerclant la barra i anells externs amb diferents orientacions respecte la barra i més aviat allargats. Si el semieix major de l'anell extern és perpendicular al semieix major de la barra, es diu que la galàxia té un anell de tipus R_1 . Si aquest anell no està complet s'anomena pseudoanell i es denota per R'_1 . Si el semieix major de l'anell és paral·lel al semieix major de la barra, es diu que l'anell és de tipus R_2 . Finalment, hi ha galàxies que presenten els dos anells a la vegada; aleshores diem que tenen un anell R_1R_2 . Aquesta classificació la va realitzar observacionalment R. J. Buta [7] en els anys vuitanta amb una mostra de més de 1 000 galàxies. Més endavant Buta mateix a [8] classifica una mostra de més de 3 500 galàxies segons els tipus d'anells, la seva orientació i la seva mida.

A part de classificar els braços i els anells segons la seva forma, és important saber també com s'han format en les galàxies barrades. Per a això s'han d'entendre els models actuals que expliquen el seu origen. Fins fa poc, es creia que els braços espirals eren ones de densitat i que els anells estan associats a ressonàncies de la barra amb el disc de la galàxia, és a dir, que les espirals i els anells tenien un origen diferent. La teoria d'ones de densitat la van desenvolupar als anys setanta els astrònoms Lin & Shu ([20, 21]) i, a grans trets, descriu els braços espirals com una lleugera pertorbació en forma d'espiral molt enrotllada en la component gasosa del disc. Quan les estrelles i els núvols de gas que viatgen pel disc es troben aquesta pertorbació, es produeixen els xocs que originen noves estrelles. Segons aquesta teoria, els braços espirals són estructures globals de llarga vida en el disc, és a dir, la forma del braç es manté constant en el temps. Però la teoria d'ones de densitat no explica quin és el mecanisme generador d'aquestes ones.

Pel que fa als anells, es creu que l'anell intern està associat a la freqüència de corotació (punts on la barra i les estrelles del disc giren a la mateixa velocitat

angular) i que l'anell extern està associat a la freqüència exterior de Lindblad (punts on la barra gira dues vegades més ràpid que les estrelles del disc). En les regions de la galàxia on es produeixen aquestes ressonàncies té lloc una acumulació d'estrelles que formen anells (Schwarz [32, 33, 34]).

En els darrers anys, hem desenvolupat una nova teoria (vegeu [29, 30]) que unifica la formació dels braços espirals i anells en galàxies barrades. Aquesta teoria només necessita l'existència de la barra per formar aquestes estructures i es basa en les varietats invariants hiperbòliques associades a òrbites periòdiques i quasiperiòdiques al voltant dels punts d'equilibri colineals del sistema galàctic (vegeu [29, 30]). Les varietats invariants defineixen l'esquelet principal de la dinàmica de transport en els sistemes dinàmics i en el camp galàctic hi trobem un exemple bonic d'aplicació.

2 La modelització d'una galàxia barrada

Per estudiar la dinàmica de moviment dins d'una galàxia cal buscar una distribució de densitat de massa que approximi bé la seva lluminositat. En les galàxies, això es fa descomponent en models de densitat les seves components principals: el disc de la galàxia, la barra, el bulb central i l'halo que la formen. D'aquestes components, el disc, el bulb i l'halo es modelitzen mitjançant una distribució axisimètrica, mentre que la barra és una component allargada amb una forma aproximada d'el·lipsoide. Un punt important que cal remarcar és que no utilitzarem una distribució de densitat específica per als braços espirals o anells. Aquestes estructures sortiran de manera natural de la dinàmica del sistema.

En la literatura es poden trobar distintes distribucions de densitat que s'han utilitzat per a modelar les diferents components d'una galàxia. Llavors, a partir de la distribució de densitat, es pot calcular el potencial mitjançant l'equació de Poisson: $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$, on G és la constant de gravitació, ρ és la distribució de densitat i Φ , el potencial desitjat corresponent.

Per començar descriurem els potencials i les distribucions de densitat més utilitzades. El disc de la galàxia es caracteritza per ser una distribució de densitat amb una caiguda exponencial des del centre de la galàxia cap a les parts més exteriors. Els potencials més comuns són els de Miyamoto-Nagai [26] i el de Kuz'min/Toomre (Kuz'min [19], Toomre [37]). L'expressió del potencial de Miyamoto-Nagai és la següent:

$$\Phi_d(R, z) = -\frac{GM_d}{\left(R^2 + \left[a_d + \left(z^2 + b_d^2\right)^{1/2}\right]^2\right)^{1/2}}, \quad (1)$$

on M_d és la massa del disc, a_d i b_d són les longituds d'escala radial i vertical, respectivament. El potencial de Kuz'min/Toomre s'acostuma a donar en termes de densitat superficial:

$$\sigma_d(r) = \frac{V_d^2}{2\pi r_d} \left(1 + \frac{r^2}{r_d^2}\right)^{-3/2}, \quad (2)$$

on els paràmetres V_d i r_d fixen les escales de la velocitat i el radi, respectivament. El bulb central, juntament amb l'halo estel·lar, es modela utilitzant una distribució de densitat del tipus

$$\rho_h(r) = \rho_s \left(1 + \frac{r^2}{r_s^2} \right)^{-3/2}, \quad (3)$$

on ρ_s i r_s determinen la seva densitat central i l'anomenat factor d'escala, respectivament. Esferoides amb una concentració alta tindran valors alts de ρ_s i valors petits de r_s , mentre que el contrari passa en el cas d'esferoides amb una concentració baixa. Encara que introduïm components axisimètriques separades, és important emfatitzar aquí que el que importa és la corba de rotació de tota la component axisimètrica i no la descomposició de la corba segons cada component. La corba de rotació, molt emprada pels astrònoms, és la gràfica del mòdul de la velocitat que portaria una estrella en una hipotètica òrbita circular situada a un cert radi del centre de la galàxia. Seguint el model keplerià, les corbes de rotació creixen de manera lineal fins a un cert radi i després haurien de decreixer com $1/\sqrt{r}$ i tendir asimptòticament a zero ja que la llum visible de la galàxia també decreix. A la pràctica, s'ha observat que les corbes de rotació de galàxies externes es tornen planes (vegeu la figura 2) a radis grans, encara que la matèria visible s'hagi extingit (Bosma [6]). Aquest fet ha induït els astrònoms a introduir la matèria fosca en els seus models. En el nostre model, ajustem els paràmetres que componen el potencial de manera que la forma de la corba de rotació s'assembli a les corbes observades.

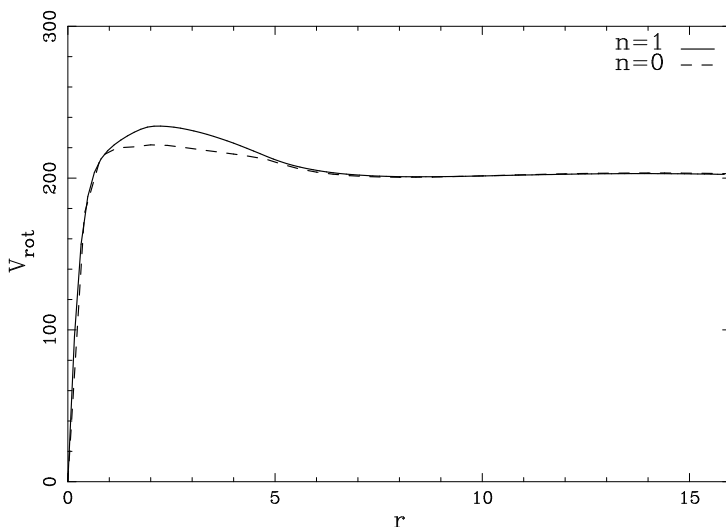


FIGURA 2: Corbes de rotació per a un model amb disc de Kuz'min/Toomre, esferoide i barra Ferrers amb índex de concentració $n = 0$ (línia discontinua) i $n = 1$ (línia contínua). El radi està mesurat amb Kpc i la velocitat en km/s.

Per a modelitzar la barra, tant trobem potencials físics, que provenen d'una distribució de densitat, com models ad hoc, anomenats així perquè es construeixen a fi que satisfacin unes certes propietats o supleixin mancances d'altres models. Els més utilitzats són l'el·lipsoide de Ferrers [15], com a potencial físic, i els potencials de tipus quadrupol, com a potencials ad hoc. La distribució de densitat associada al potencial de Ferrers és la següent:

$$\rho_b = \begin{cases} \rho_0(1 - m^2)^n, & m \leq 1, \\ 0, & m > 1, \end{cases} \quad (4)$$

on $m^2 = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/b^2$, i a i b són els semieixos major i menors de l'el·lipsoide, respectivament. El paràmetre n mesura el grau de concentració de la barra i ρ_0 mesura la seva concentració central. Aquest paràmetre està relacionat amb la massa de la barra mitjançant l'expressió

$$M_b = 2^{2n+3} \pi a b^2 \rho_0 \Gamma(n+1) \Gamma(n+2) / \Gamma(2n+4), \quad (5)$$

on Γ és la funció gamma d'Euler. Els potencials de tipus quadrupol s'obtenen en fer una descomposició de Fourier de tot el potencial i retenir la component $m = 2$. D'aquesta manera els potencials de quadrupol tenen la forma

$$\Phi_b(r, \theta) = -A(r) \cos(2\theta), \quad (6)$$

on $A(r)$ és una funció que depèn del radi i determina la mida i l'amplitud de la barra. Un exemple clàssic podria ser

$$A(r) = A_b \cdot \begin{cases} 2 - \left(\frac{r}{R_b}\right)^3, & r \leq R_b, \\ \left(\frac{R_b}{r}\right)^3, & r \geq R_b, \end{cases} \quad (7)$$

on R_b determina la mida i A_b determina l'amplitud [14, 16]. En resum, doncs, el potencial galàctic global amb el qual treballarem vindrà donat per la superposició d'aquests potencials: $\Phi = \Phi_d + \Phi_h + \Phi_b$, on Φ_d és el potencial de disc, Φ_h representa l'halo estel·lar i Φ_b descriu la barra.

3 Les equacions de moviment i la dinàmica al voltant dels punts d'equilibri

Considerem un sistema de referència on la barra de la galàxia giri com un sòlid rígid al voltant de l'eix de les z amb una velocitat constant, anomenada velocitat del patró, $\Omega_p = (0, 0, \Omega_p)$.¹ Les equacions del moviment en el sistema no inercial on la barra està fixa estan descrites en forma vectorial com a (vegeu [5])

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\Phi_{\text{eff}} - 2(\Omega_p \times \dot{\mathbf{r}}), \quad (8)$$

¹ Les variables en negreta denoten vectors.

on $\mathbf{r} = (x, y, z)$ és el vector posició, $\Phi_{\text{eff}} = \Phi - \frac{1}{2}\Omega_p^2(x^2 + y^2)$ és el potencial efectiu en el sistema no inercial i $\Phi = \Phi_{axi} + \Phi_b$ és el potencial total del sistema, considerant que Φ_{axi} comprèn les components axisimètriques i Φ_b denota el potencial de barra descrits en la secció 2.

Els punts d'equilibri del sistema (8) els trobem allà on s'anulla el gradient del potencial efectiu. Hi ha cinc punts d'equilibri, denotats per L_i , $i = 1 \dots 5$, tots localitzats en el pla galàctic, $z = 0$, i distribuïts tal com veiem a la figura 3. L'estabilitat d'aquests punts tindrà un paper important i la descriurem més endavant.

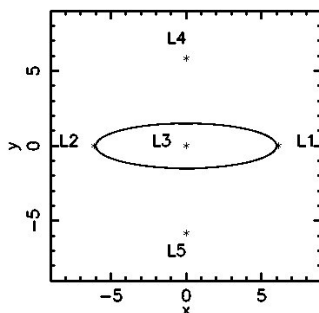


FIGURA 3: Posició dels punts d'equilibri en el pla galàctic. Els cinc punts de Lagrange estan assenyalats amb un asterisc, mentre que la línia més gruixuda assenyalava la posició i la llargada de la barra.

Les equacions del moviment (8) tenen també una integral primera, anàloga a l'energia en el sistema inercial, anomenada *energia de Jacobi* o *constant de Jacobi* i definida per

$$E_J = \frac{1}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 + \Phi_{\text{eff}}. \quad (9)$$

Per a un valor d'energia fixat, aquesta equació defineix una superfície de velocitat zero i, el tall d'aquesta amb el pla galàctic, $z = 0$, defineix les corbes de velocitat zero: $\Phi_{\text{eff}}(x, y) = E_J$. Notem que, a causa del valor no negatiu que ha de tenir l'energia cinètica a (9), els punts (x, y) de l'espai de configuracions tals que $\Phi_{\text{eff}}(x, y) > E_J$ constitueixen regions prohibides per al nivell d'energia considerat. Mentre que les regions on $\Phi_{\text{eff}}(x, y) \leq E_J$ són possibles llocs de moviment que s'anomenen regions de Hill.

També, com que la densitat associada al potencial s'estén molt més en el pla galàctic que en la direcció vertical, i com que el pla galàctic és invariant, és comú restringir l'estudi del problema en aquest pla. A la figura 4 podeu veure les regions de Hill per al problema pla segons els valors d'energia considerats.

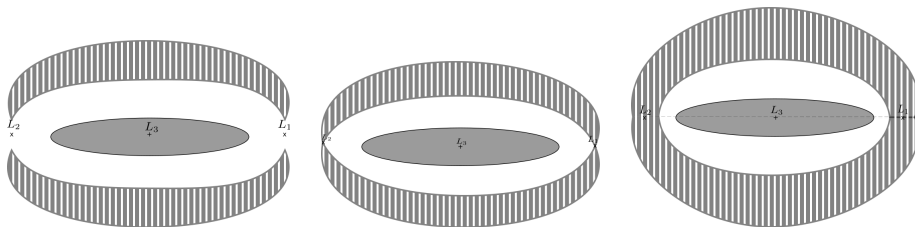


FIGURA 4: Regions de Hill a $z = 0$ segons el nivell d'energia E_J considerat. Si denotem per E_{L_i} l'energia dels punts d'equilibri L_1 i L_2 ($E_{L_1} = E_{L_2}$), les tres figures ens descriuen la forma i connectivitat de les regions de Hill que tenim quan $E_J > E_{L_i}$, $E_J = E_{L_i}$ i $E_J < E_{L_i}$ dins el rang d'energies del nostre interès. Depenent de si l'energia és més gran o més petita que l'energia dels punts d'equilibri L_1 i L_2 , les regions de Hill estan constituïdes per una o dues components connexes que formen el complementari de les zones prohibides, representades per les zones ratllades. Ara bé, ja sigui en el cas de dues components connexes, o en el cas d'una única component connexa, en el nostre rang d'energies d'interès sempre es delimiten dues possibles zones de moviment. Una d'interior, on hi ha la barra (representada per una el·lipse en gris), i una altra d'exterior que envoltaria les regions prohibides. En el cas on només tenim una única component connexa com a regió de possible moviment, les regions de Hill interior i exterior queden connectades per «un coll d'ampolla» a l'entorn de la posició dels punts d'equilibri L_1 i L_2 (vegeu també la figura 6).

3.1 Punts d'equilibri lagrangians i dinàmica al voltant seu

Tal com veiem a la figura 3, dos dels punts d'equilibri, els que denotem per L_1 i L_2 , estan situats al llarg del semieix major de la barra (que en aquest article considerem que es troba damunt l'eix x) i són del tipus centre $\times$ sella. Al centre de la galàxia, i origen del nostre sistema de coordenades, hi trobem el punt L_3 , mentre que al llarg del semieix menor de la barra (damunt de l'eix y i oposats en signe) hi ha els punts L_4 i L_5 . Els tres darrers punts són linealment estables i de tipus centre $\times$ centre. Notem també l'analogia d'aquests punts, anomenats *punts de Lagrange*, amb els d'altres models com el problema restringit de tres cossos (vegeu [36]).

Associada a cada centre de cada un d'aquests punts d'equilibri hi ha una família d'òrbites periòdiques, i també òrbites quasiperiòdiques en cas de tenir més d'una component central. Les òrbites al voltant del punt d'equilibri L_3 han estat ben estudiades a la literatura. Aquestes òrbites són estables per a un rang gran d'energies i per això es considera que poden atrapar matèria al voltant seu. D'aquesta manera es caracteritzen per formar l'esquelet de la barra (vegeu la figura 5 i els treballs de Contopoulos & Papayannopoulos [13], Pfenniger [28], Patsis, Skokos, Athanassoula [27], Contopoulos [12], per citar-ne alguns).

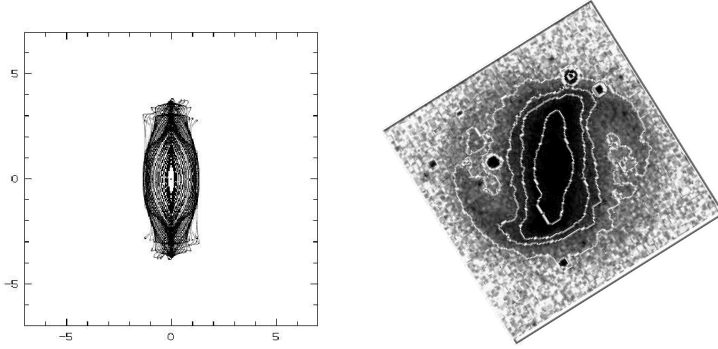


FIGURA 5: A la figura de l'esquerra es representen un conjunt d'òrbites periòdiques estables al voltant del punt L_3 (figura 7a de Patsis, Skokos & Athanassoula [27]). En aquest cas, el semieix major de la barra coincideix amb l'eix de les γ . A la figura de la dreta es mostra la barra de la galàxia NGC 4314 extreta de Digital Sky Survey.

Les òrbites al voltant de L_4 i L_5 són també linealment estables i s'acostumen a anomenar òrbites *banana*, però la seva forma no representa cap característica de la galàxia [27]. Les òrbites al voltant dels punts L_1 i L_2 són inestables i, per aquest fet, no poden atrapar matèria al seu voltant durant llargs períodes de temps. És per això que no s'havien estudiat mai amb profunditat fins als treballs que hem desenvolupat a [29, 30, 31], on també incloem l'anàlisi del paper que exerceixen les seves varietats invariants.

3.2 El paper de les varietats invariants

Denotem per $X = (x, \gamma, \dot{x}, \dot{\gamma})$ un estat del nostre model pla i per $\Psi_t(X)$ l'òrbita que, per a $t = 0$, té l'estat X ($\Psi_0(X) = X$). Com és ben sabut, donada una òrbita periòdica γ_i en un entorn de L_1 o de L_2 , on la família és inestable, hi tenim associades les seves varietats estable i inestable que es defineixen per

$$W_{\gamma_i}^s = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \|\Psi_t(X) - \gamma_i\| = 0 \right\},$$

$$W_{\gamma_i}^u = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Psi_t(X) - \gamma_i\| = 0 \right\},$$

on la doble barra denota distància euclidiana a l'espai de fase. És a dir, que la varietat invariant estable (respectivament, inestable) està formada pel conjunt d'òrbites asimptòtiques que tendeixen a l'òrbita periòdica γ_i quan el temps tendeix a més infinit (respectivament, a menys infinit).

Les òrbites de $W_{\gamma_i}^s$ i $W_{\gamma_i}^u$ tenen la mateixa energia que l'òrbita periòdica γ_i i, per tant, pertanyen a la mateixa varietat energètica 3-dimensional que conté γ_i . A més, topològicament, $W_{\gamma_i}^s$ i $W_{\gamma_i}^u$ es poden descriure com a cilindres 2-dimensionals que formen, per a cada varietat, dues branques que es troben a l'òrbita

periòdica d'una manera similar al comportament d'un punt de sella (en aquest cas el punt és un cercle S^1), tal com es veu a la figura 6. Notem que per a cada parell de branques una es dirigeix, o prové, de la component interior a la corba de velocitat zero, mentre que l'altra ho fa respecte de la component exterior. També, dins el nivell d'energia, aquests cilindres separen diferents comportaments depenent de si un estat es troba a dins, a fora o al damunt seu, tal com es pot veure als treballs iniciats per Conley per al problema restringit (vegeu [11, 17, 18]).

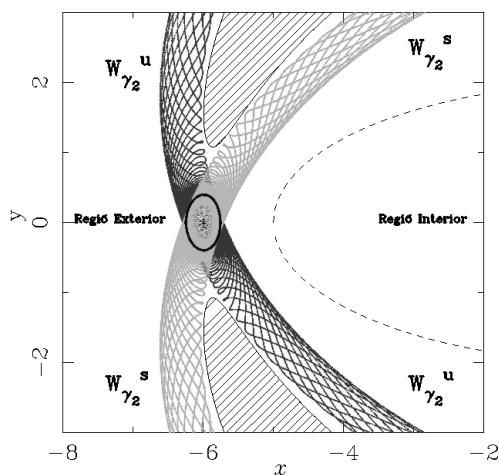


FIGURA 6: Varietats invariants estable i inestable d'una òrbita periòdica al voltant del punt L_2 . En gris clar, les dues branques de la varietat invariant estable, $W_{\gamma_i}^s$, i en gris més fosc, les dues branques de la varietat invariant inestable, $W_{\gamma_i}^u$. Les regions prohibides es representen per les zones ratllades mentre que la línia discontinua de la regió interior assenyalava la posició de la barra i la corba negra al voltant del punt d'equilibri representa l'òrbita periòdica, γ_i . Les components dinàmiques es faran visibles en una galàxia en cas que les seves òrbites continguin estrelles.

Una bona manera de visualitzar i entendre aquestes varietats 3-dimensionals és per mitjà de seccions de Poincaré. En el nostre cas, prenem la superfície de secció S definida per $y = 0$, $x > 0$ amb $\dot{y} < 0$. És a dir, considerem les òrbites en tallar la part positiva de l'eix x amb la component de velocitat y negativa.

En aquesta secció S considerarem les interseccions de les varietats $W_{\gamma_2}^s$ i $W_{\gamma_2}^u$. Sortint de l'òrbita periòdica γ_2 i integrant temps endavant per a $W_{\gamma_2}^u$ (resp. temps enrere per a $W_{\gamma_2}^s$) obtenim el primer tall de la varietat amb S , que anomenem $W_{\gamma_2}^{u,1}$ (resp. $W_{\gamma_2}^{s,1}$).

Tal com veiem a la figura 7, on representem la projecció $(x, \dot{x})$ de $W_{\gamma_2}^{u,1}$ i de $W_{\gamma_2}^{s,1}$ dins de S , $W_{\gamma_2}^{u,1}$ i $W_{\gamma_2}^{s,1}$ són dues corbes tancades. És també important

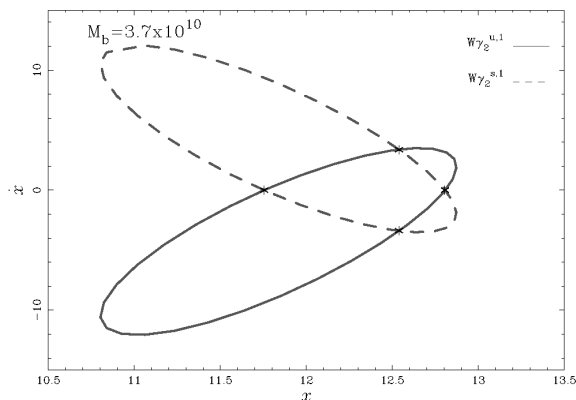


FIGURA 7: Tall de les varietats invariants estable i inestable d'una òrbita periòdica al voltant del punt L_2 amb la secció S . En línia discontinua, el primer tall de la branca de la varietat invariant estable, $W_{\gamma_2}^s$, i en línia contínua, el primer tall de la branca de la varietat invariant inestable, $W_{\gamma_2}^u$. Els punts marcats amb un asterisc corresponen a òrbites homoclíniques.

notar que una parella $(x, \dot{x})$ a S representa una òrbita de manera única en cas que l'energia estigui fixada, ja que l'estat $(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ es completa amb $y = 0$ i la coordenada $\dot{y} < 0$ s'obté imposant la restricció que l'estat pertanyi a la varietat de nivell d'energia donat.

Arribats a aquest punt ens cal recordar alguns conceptes pel que fa a òrbites asimptòtiques temps endavant i temps enrere a la vegada: una òrbita ψ es diu que és homoclínica si $\psi \in W_{\gamma_i}^u \cap W_{\gamma_i}^s$, $i = 1, 2$. Anàlogament es diu que ψ és heteroclínica si $\psi \in W_{\gamma_i}^u \cap W_{\gamma_j}^s$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Tenim, per tant, que un punt de $W_{\gamma_2}^{u,1} \cap W_{\gamma_2}^{s,1}$ representat a la projecció $(x, \dot{x})$ de S es correspon amb una òrbita homoclínica. A l'exemple de la figura 7 hi ha quatre punts però, com és natural, la forma i posició relativa de $W_{\gamma_2}^{u,1}$ i $W_{\gamma_2}^{s,1}$ varia depenent de l'energia i del model galàctic considerat i i poden tallar-se o no.

Les interseccions, o la manca d'interseccions, de varietats estables i inestables determinen l'esquelet fonamental de la dinàmica i classifiquen, d'alguna manera, conjunts de trajectòries atenent al seu comportament passat i futur, tal com va intuir Poincaré i després Smale i molts altres van formalitzar i estudiar. En un context semblant al que ens ocupa es poden trobar descripcions i anàlisis detallades a [18, 22, 25] per al cas del problema pla, i a [17] per al cas del problema espacial. Però, pel que fa a l'aplicació concreta de l'exemple que representem a la figura 7, referit a l'estudi de formació de braços i anells en galàxies barrades, només notarem els fets següents:

- Tal com hem dit, els punts de S que es troben damunt de $W_{\gamma_2}^{s,1}$ o de $W_{\gamma_2}^{u,1}$ corresponen a òrbites asimptòtiques a γ_2 ja sigui temps endavant o temps enrere.

- Els punts de S que es troben a l'interior de la corba $W_{\gamma_2}^{s,1}$ es corresponen a òrbites dins del cilindre $W_{\gamma_2}^s$ que, temps endavant, passaran pel «coll d'ampolla» que hi ha entre les regions de Hill de la corba de velocitat zero prop de γ_2 i transitaran, d'aquesta manera, de la regió galàctica exterior a la interior, on es troba la barra.
- Els punts de S que es troben a l'exterior de la corba $W_{\gamma_2}^{s,1}$ es corresponen amb òrbites fora del cilindre $W_{\gamma_2}^s$ les quals, temps endavant, la primera vegada que es trobin a prop del mateix «coll d'ampolla» no transitaran sinó que romandran a la regió exterior.
- Per als punts de S que hi ha a les regions interior o exterior a la corba $W_{\gamma_2}^u$ el comportament és totalment anàleg però considerant el temps enrere. És a dir, de manera respectiva, o bé vénen de transitar pel coll d'ampolla, o bé la darrera vegada que han passat a prop del coll d'ampolla no han transitat.

Atenent a aquests fets, diferents regions de S queden classificades segons el seu comportament passat i futur. És clar que «per veure» més endavant en el futur, o més enrere en el passat, caldria considerar més interseccions ($W_{\gamma_2}^{s,j}$, $W_{\gamma_2}^{s,j}$, $j = 2, 3, \dots$) i també el paper de $W_{\gamma_1}^{s,j}$, $W_{\gamma_1}^{s,j}$, ($j = 1, 2, \dots$) les quals es poden intersecar entre si, i també amb les de γ_2 , la qual cosa dóna comportaments homoclínics o heteroclínics complexos.

A la figura 8 representem alguns exemples possibles: a la part (a) tenim una òrbita homoclínica a γ_2 i que podria correspondre a algun dels punts d'intersecció de la figura 7. L'òrbita surt de γ_2 , no transita quan està prop de L_1 (és a dir, estaria fora d'una corba $W_{\gamma_1}^{s,1}$ calculada per exemple damunt d'una secció posada a $x = 0$, $y > 0$) i després de fer la volta torna a γ_2 . A la part (b) tenim una òrbita heteroclínica que surt de l'òrbita de Lyapunov a prop de L_2 i arriba a la Lyapunov a prop de L_1 i que podria estar calculada intersecant les corresponents varietats en una secció posada a $x = 0$. Finalment a la part (c) tenim una òrbita de trànsit que, d'estar prop de la barra a la regió interior, passa pel coll d'ampolla i surt a la regió exterior en espiral.

Aquests tres tipus d'òrbites esdevenen l'esquelet de les estructures d'anells i espirals observades en les galàxies. En el cas que els paràmetres del model siguin els adequats, el sistema presentarà òrbites heteroclíniques i la morfologia global resultant serà la d'anell de tipus rR_1 , és a dir, una galàxia amb els dos anells r i R_1 presents a la vegada; en el cas que els paràmetres del model facin que el sistema presenti òrbites homoclíniques, la morfologia global serà d'anell de tipus R_1R_2 . Finalment, per a certs paràmetres, el sistema només té òrbites de tipus trànsit i, aleshores, depenent de l'angle de cargolament de la varietat invariant, la morfologia global serà d'anell R_2 o de braços espirals. A la secció següent analitzem quins són els paràmetres que diferencien una morfologia d'una altra.

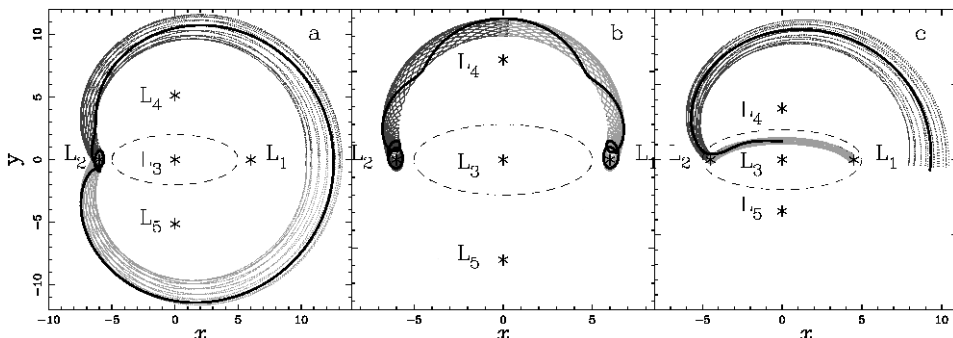


FIGURA 8: Varietats invariants estable i inestable d'una òrbita periòdica al voltant dels punts d'equilibri L_1 i L_2 . En gris clar representem les varietats invariants estables, $W_{y_i}^s$, i en gris més fosc, les varietats invariants inestables, $W_{y_i}^u$. Els asteriscs marquen la posició dels punts d'equilibri i les línies discontinües en forma d'el·lipse assenyalen la forma de la barra. Les òrbites més gruixudes en negre de cada quadre es corresponen amb òrbites: (a) homoclíniques, (b) heteroclíniques i (c) de trànsit.

3.3 Estudi morfològic en funció dels paràmetres galàctics

En aquesta secció volem estudiar com depèn el lloc geomètric de les varietats invariants, i per tant, l'existència d'òrbites homoclíniques, heteroclíniques i de trànsit, dels paràmetres de la barra. Considerarem dues famílies de models lleugerament diferents. El primer, que anomenarem model A, tindrà un disc de Kuz'min/Toomre (2), un esferoide (3) i una barra de Ferrers (4). El segon, que anomenem model B, tindrà la mateixa component axisimètrica que el model A i una barra quadrupol (6). Els models de tipus A tenen quatre paràmetres lliures principals: la seva concentració central ρ_c ; el quocient dels semieixos de la barra, a/b ; la massa de la barra, M_b (5), i la velocitat angular, Ω_p (parametritzada mitjançant el radi de Lagrange² r_L). A [29] vàrem comprovar que només la massa de la barra i el radi de Lagrange tenen una influència en regions exteriors, i per tant, limitem l'estudi a aquests dos paràmetres. Pel que fa al model B, només té dos paràmetres lliures que són l'amplitud del potencial de barra, A_b , i el radi de Lagrange. La resta de paràmetres dels models restaran fixats. Per a cadascun dels models, construïm una graella on en cada quadre considerem uns valors rellevants per a aquest espai de paràmetres: (r_L, M_b) per al model A i (r_L, A_b) per al model B (vegeu els panells superior i inferior, respectivament, de la figura 10). Cada fila correspon a un valor de la força de la barra i cada columna, a un valor de la velocitat angular del patró.

² Definim r_L com la distància entre els punts d'equilibri L_1 i L_2 al centre de la galàxia. Aquesta distància està relacionada amb la velocitat angular del patró mitjançant:

$$\Omega_p^2 = r_L \left(\frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right)_{r_L}, \quad (10)$$

on $\Phi(r)$ és el potencial en el pla galàctic.

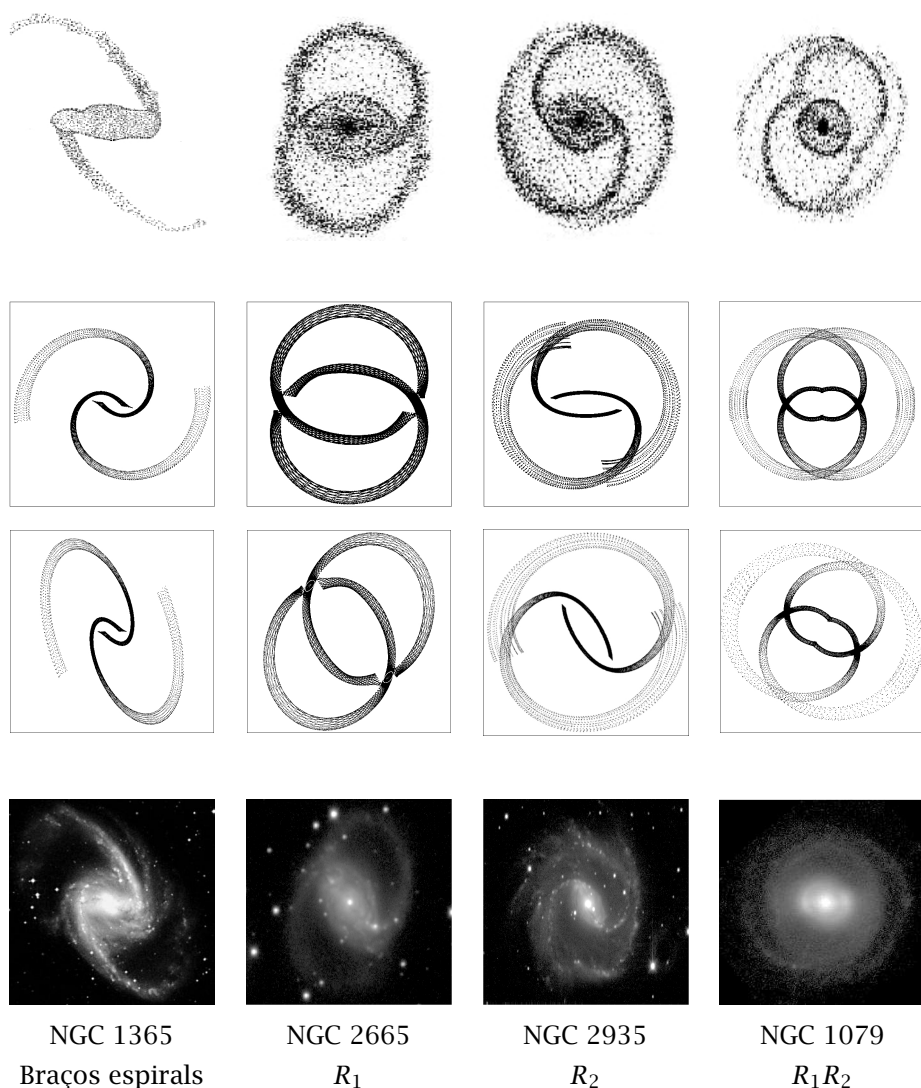


FIGURA 9: Morfologies d'anells i de braços espirals. A la darrera fila tenim quatre galàxies tipus: espiral, R_1 , R_2 i R_1R_2 . La primera fila mostra dibuixos esquemàtics d'aquests tipus realitzats per Buta i Crocker [10]. A les files centrals veiem com les varietats invariants poden reproduir morfologies semblants. Concretament a la segona fila representem les varietats al pla i a la tercera fila, una projecció adequada.

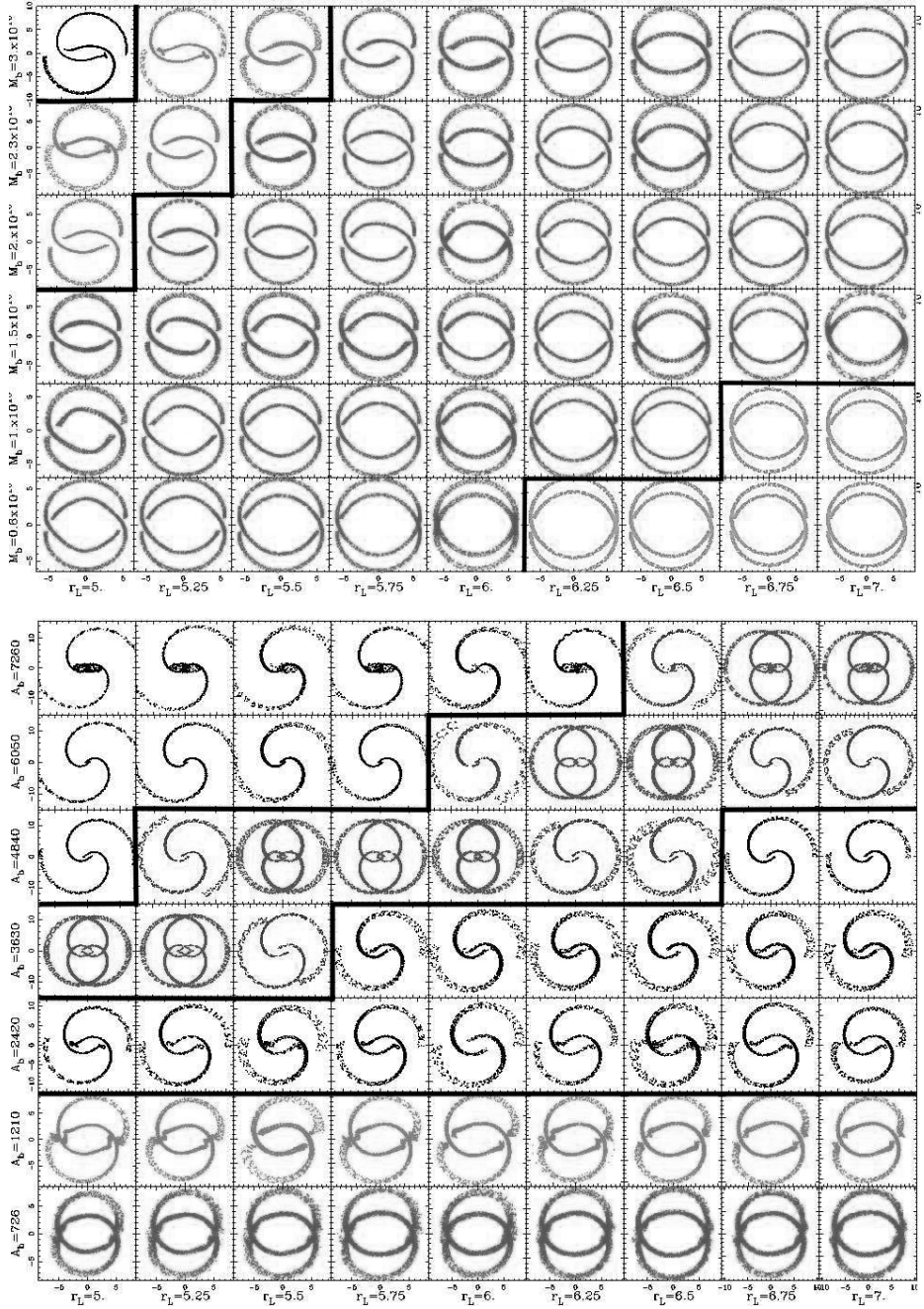


FIGURA 10: Morfologies en funció dels paràmetres principals de la modelització: r_L i M_b per al model A (quadre superior) i r_L i A_b per al model B (quadre inferior). Les transicions estan descrites en el text.

Tenint en compte si cada cas presenta òrbites homoclíniques, heteroclíniques o de trànsit, hem trobat i classificat les morfologies de les branques exteriors de les varietats en espirals, anells R_1 , anells R_2 i anells R_1R_2 . Atenent als quadres de la figura 10 obtenim una clara tendència en el pla (força, velocitat angular). Diferents morfologies estan agrupades en diferents parts del pla formant, de manera aproximada, bandes diagonals. Així, en el model A observem una transició, via anells R_1 , des de la galàxia espiral de l'extrem superior esquerra a l'extrem inferior dret, on els braços exteriors formen pràcticament un sol anell circular. En el model B s'observen dues bandes de galàxies espirals separades per una banda d'anells R_2 i R_1R_2 , mentre que a la part inferior d'aquesta figura hi ha una transició envers els anells R_1 de la darrera fila.

Notem també la diferència entre els dos models. El model A és més físic i aquest fet ens restringeix el rang de valors per a la massa de la barra. En canvi, el model B és un model ad hoc i ens permet ampliar el rang del paràmetre d'amplitud de la barra. La diferència entre els dos quadres ens indica que el rang de massa del model A correspon a un petit rang del paràmetre A_b del model B, entre 726 i 2420. L'exploració del paràmetre A_b en el model B reflecteix les diferents morfologies de les varietats invariants.

4 Comparació amb la teoria de les ones de densitat

Com hem apuntat en la introducció, en la teoria d'ones de densitat els braços espirals es formen a causa de petites pertorbacions en la component gasosa. Segons aquesta teoria, els núvols de gas que giren en el disc es troben aquesta pertorbació, es crea una sobredensitat que fa que es produeixin xocs i formació estellar i les estrelles formades evolucionen i continuen girant en el disc. Per tant, les estrelles travessen el braç espiral transversalment. El sentit de circulació de les estrelles és una de les diferències més importants entre les dues teories. En la teoria de les varietats invariants, les partícules circulen per dins els tubs de les varietats, és a dir, resseguint el braç espiral. En la figura 11 veiem quina és la circulació natural en un model de varietats invariants. Partint de la part interna de la galàxia, les partícules seguirien la branca interior de la varietat estable, s'acostarien al punt d'equilibri i escaparien cap enfora seguint la branca exterior de la varietat inestable. Aquesta circulació, però, porta d'alguna manera implícit el fet que les partícules dels braços provenen del centre de la galàxia i que la barra fa de reserva per als braços. Tenint en compte que les simulacions de N -cossos han demostrat que la barra no és una estructura estable sinó que evoluciona en el temps allargant-se i frenant-se (e.g. Widrow *et al.* [39] i referències a l'interior), sembla que a la llarga s'haurien de veure galàxies on la barra brilli menys que els braços, i aquest fet no s'observa. Mitjançant simulacions de partícules test, hem pogut comprovar que no totes les partícules que poblen els braços espirals provenen del centre de la barra. A mesura que la barra es va formant en el disc de la galàxia, les varietats també van apareixent i partícules amb la posició i velocitat adequada que inicialment estaven en les parts externes del disc, ara segueixen les varietats.

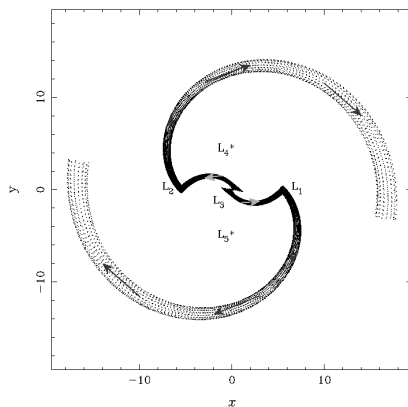


FIGURA 11: Sentit de circulació de les partícules al llarg de les varietats invariants. Les varietats estables es disposen a la part interior de la figura i les inestables a la part exterior.

Una altra diferència amb els braços originats mitjançant ones de densitat fa referència a la morfologia. La teoria de les ones de densitat consisteix, a grans trets, a pertorbar la dinàmica del disc mitjançant una funció que, descomposta en sèrie de Fourier, recull el mode $m = 2$ i té un lloc geomètric imposat que, de manera estàndard, és d'una forma logarítmica. És a dir, els braços espirals generats per la teoria d'ones de densitat tenen una forma logarítmica, imposada per les pròpies equacions. Aquesta forma s'ha deduït a força de deprojectar una mostra de galàxies espirals normals i comprovar que la majoria de les espirals es poden ajustar mitjançant una funció logarítmica (vegeu [23]). Aquest estudi, però, només inclou les espirals normals, sense barra. En galàxies barrades s'aprecia com l'espiral no espirala cap enfora sinó que s'expandeix fins a assolir un radi màxim i després retorna a la regió de la barra, com per exemple a la galàxia NGC 1365 representada a la figura 12. Aquest fenomen també el poden reproduir les varietats invariants. Observem la mateixa figura 12, on en el quadre de l'esquerra es detecta la sobredensitat dels braços en la galàxia NGC 1365 i en el de la dreta, la sobreposem amb les varietats invariants d'un model de tipus B amb $r_L = 5$ i $A_b = 1210$, en el pla $(\ln(r), \theta)$. En aquest pla, un braç logarítmic es representaria amb una línia recta.

També hi ha certs paràmetres dels models que permeten que les varietats invariants tinguin una forma aproximadament logarítmica. Estudiem com varia l'angle d'enrotllament dels braços obtinguts mitjançant varietats invariants en funció de la força de la barra, expressada com a quocient de la força tangencial de la barra en el radi de Lagrange i la força radial de la component axisimètrica. En cada model la forma de les varietats invariants s'ha ajustat a una espiral logarítmica. El resultat reproduïx l'obtingut per Schwarz [33] mitjançant simulacions dinàmiques amb partícules test i també les dades observacionals obtingudes per Martínez-García [24] a partir d'una mostra de galàxies externes i donada a la figura 13.

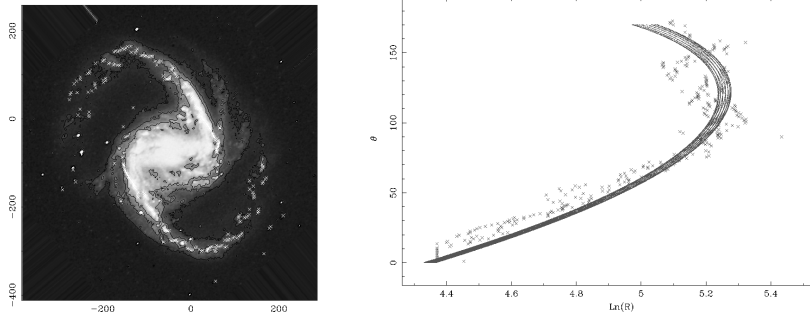


FIGURA 12: En el panell de l'esquerra es representa la galàxia NGC 1365 i, marcats amb punts, la sobredensitat donada pels braços espirals. En el panell de la dreta, sobreposem els punts corresponents a la figura de l'esquerra amb les varietats invariants corresponent al model B amb $r_L = 5$ i $A_b = 1210$, en el pla $(\ln(r), \theta)$.

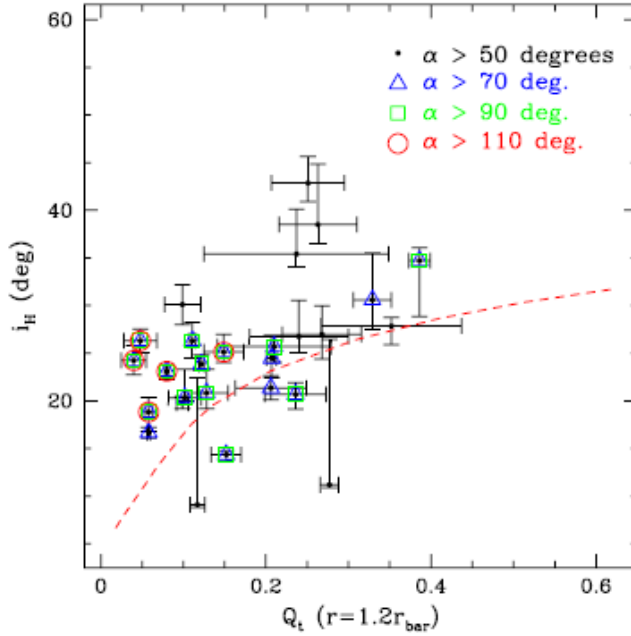


FIGURA 13: Variació de l'angle d'enrotllament en funció de la força tangencial de la barra avaluada en el punt de Lagrange L_1 per a una mostra de galàxies descrita en [24]. La línia discontinua indica la predicció de les varietats invariants.

5 Comparacions observacionals amb galàxies externes

En la sèrie d'articles [29, 30, 31], fets amb la col·laboració d'investigadors de l'Observatori de Marsella, hem aplicat la teoria dels sistemes dinàmics i el càlcul de varietats invariants a un potencial galàctic, tot comprovant que aquestes tenen l'estructura adequada per descriure els braços i els anells de galàxies barrades. Així mateix hem estudiat quin és l'efecte del gas acumulat en aquestes òrbites i quina és la cinemàtica induïda (vegeu [1, 2, 3]).

La forma dels anells es manté no només per als models barrats estàndards, sinó també quan la barra és de tipus «ansae». Aquest tipus de barra es caracteritza per tenir unes sobredensitats de forma més o menys esfèrica al capdavall de la barra, i perquè observacionalment semblen nanses enganxades als extrems de la barra. Podem modelitzar les barres nansa afegint al potencial de la barra dos discs idèntics, cadascun centrat en la posició del punts de Lagrange L_1 i L_2 . Això fa que canviï la topologia de les corbes de potencial isoefectiu de la manera següent: els punts L_1 i L_2 esdevenen mínims del potencial d'on es bifurquen dos punts de sella, un a cada costat del mínim. Els anomenem L_j^i i L_j^o ($j = 1, 2$) (vegeu el quadre superior esquerre de la figura 14). Tenim llavors que al voltant d'aquests punts d'equilibri existeix una família inestable d'òrbites periòdiques amb les varietats invariants corresponents. La dinàmica que descriuen i la seva forma global, representada a la resta de quadres de la figura 14, és més complexa, però es pot descriure amb les mateixes idees que hem presentat a la secció 3.

Pel que fa a la forma dels anells, hem calculat, per a tota la mostra de models considerats, quina és la relació dels semieixos dels anells que serveix als astrònoms per a les seves classificacions: d_o/D_o , on d_o és el semieix menor de l'anell exterior i D_o és el semieix major de l'anell exterior, així com el quocient dels semieixos de l'anell interior, d_i/D_i , definit de manera anàloga. En la mostra de galàxies amb anells del catàleg de Buta [8], aquests valors estan entre 0.82 ± 0.07 i 0.81 ± 0.06 , respectivament. A la figura 15 els representem segons la força de la barra, descrita en funció de la força tangencial, com s'ha mencionat anteriorment. L'escala de grisos i els símbols dels punts representen les morfologies (R_1 en gris fosc i R'_1 en gris més clar) i els diferents models utilitzats en l'estudi (rombes, model A, i asteriscs, model B). Notem la forta correlació entre el quocient dels semieixos i la força de la barra: com més forta és la barra, més excèntrics són els anells. Notem també que pràcticament tots els valors formen part de la zona ombrejada que coincideix amb el rang observacional que hem mencionat.

Un altre fet observacional que cal tenir en compte és que la major part dels braços espirals estan formats per gas i, per tant, és natural preguntar-se quin serà l'efecte del gas en les òrbites atrapades per les varietats invariants. Per estudiar aquest efecte, ens remetem al treball de Schwarz [33], on s'utilitzen simulacions de partícules test. En certes posicions aleatòries en el disc es simula el xoc de partícules fent perdre una certa quantitat d'energia cinètica a la partícula. En els nostres treballs [2, 3] utilitzem una tècnica semblant: prenem condicions

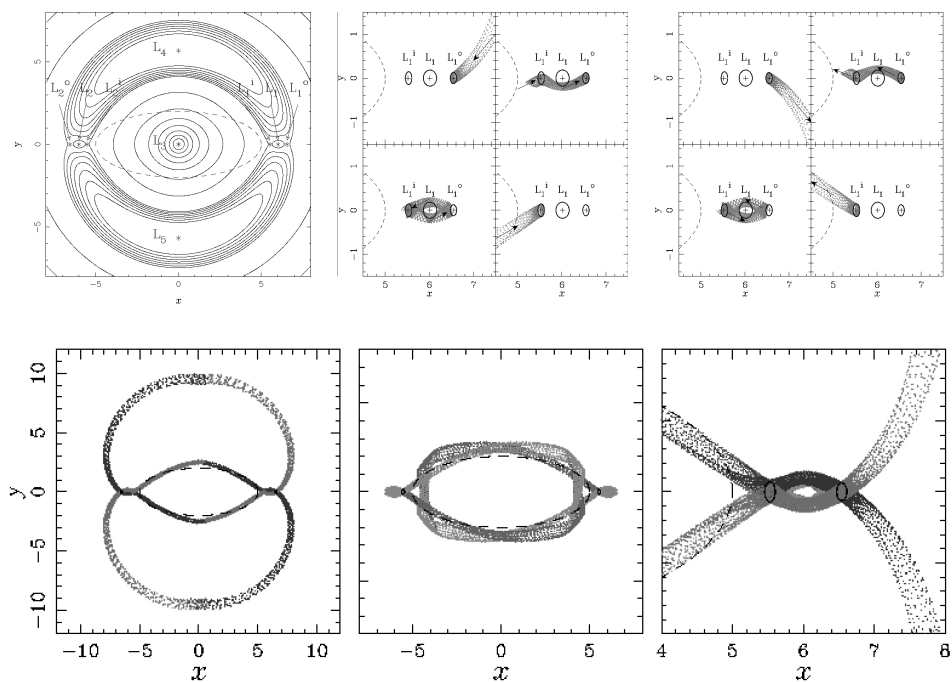


FIGURA 14: Dinàmica al voltant dels punts d'equilibri al final de les barra nansa. Superior esquerra: Corbes de potencial isoeffectiu i posició dels punts d'equilibri. Superior centre i dreta: Òrbites periòdiques i varietats invariants al voltant dels nous punts sella L_1^i i L_1^o . Inferior esquerra: les varietats associades al punts L_1^o i L_2^o mantenen la forma global d'anell. Inferior centre: Les varietats invariants associades als punts L_1^i i L_2^i donen una forma més rectangular a l'anell interior. Inferior dreta: Ampliació de la zona dels punts d'equilibri emfatitzant la forma de nansa.

inicials d'òrbites atrapades per les varietats invariants i en una posició aleatòria al llarg de mitja revolució li fem perdre energia cinètica i continuem integrant. Llavors comparem dues coses: les trajectòries originals i les trajectòries amb xoc, i comprovem que les òrbites amb xoc estan, com si diguéssim, per dins dels cilindres de les òrbites originals. És a dir, en fer perdre energia a la partícula, aquesta s'ha mogut de la varietat invariant original a una òrbita confinada per la varietat corresponent de l'energia final. L'efecte global és que els braços amb xoc són més estrets i densos en la part central (vegeu el quadre esquerre de la figura 16). La segona comprovació és la comparació de les varietats invariants amb el resultat de les partícules test de Schwarz. Comprovem que les sobredensitats donades per les simulacions (punts en negre) i les donades per les òrbites amb xocs (zones ombrejades en gris clar) se solapen perfectament, tal com veiem al quadre dret de la figura 16.

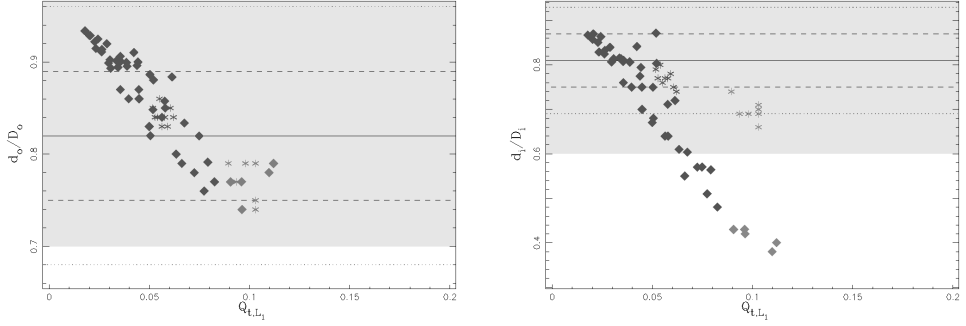


FIGURA 15: Quocient dels semieixos de l'anell exterior (figura esquerra) i de l'anell interior (figura dreta) en funció de la força tangencial avaluada en el punt d'equilibri L_1 . La línia horitzontal sòlida marca la mitjana observacional; la discontinua assenyalava el rang dins la desviació estàndard i la puntejada, el rang dins dues vegades la desviació estàndard. La zona ombrejada assenyalava el rang observacional obtingut per Buta [8]. L'escala de grisos dels punts denoten el tipus de morfologia (gris fosc per a anells R_1 i gris clar per a pseudoanells rR'_1), mentre que els diferents símbols denoten els diferents models (rombes per al model A i asteriscs per al model B).

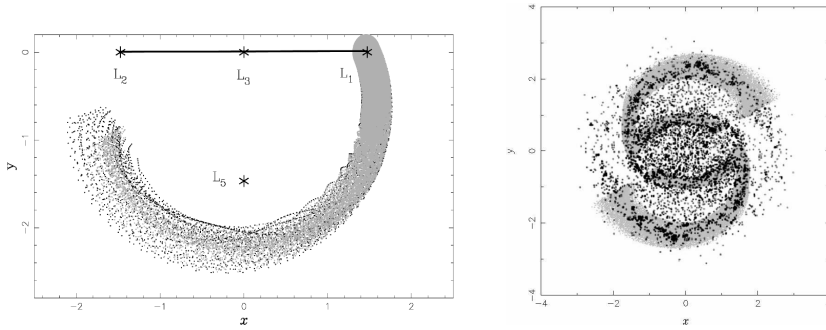


FIGURA 16: Efectes del gas en les òrbites atrapades per les varietats invariants. Panell esquerre: Comparació de les varietats invariants (en negre) i les òrbites afectades pels xocs (ombrejades amb gris clar). Els asterics marquen la posició dels punts d'equilibri, i la línia recta superior marca la posició de la barra. Panell dret: Comparació de les òrbites afectades pels xocs (ombrejades amb gris clar) amb les partícules test de les simulacions de Schwarz (en negre).

Finalment, calculem la velocitat al llarg de la línia de visió en diferents punts de l'espiral i dels anells exteriors (vegeu figura 17). És a dir, projectem el vector velocitat de cada partícula en el sistema inercial al llarg de la línia que uneix la posició de l'observador i la de la partícula. Cadascun dels quadres representa un angle de visió diferent; això vol dir que la posició de l'observador respecte la galàxia és diferent en cadascun dels quatre casos considerats. En conseqüència podem generalitzar el resultat a les diferents configuracions de galàxies que ens podem trobar al cel. L'eix de les x representa l'angle al llarg de la varietat invariant definit de manera matemàtica i l'eix de les y , la projecció al llarg de l'eix de la visió del vector de velocitats en el sistema inercial. Comprovem que en el cas que la morfologia sigui d'anell R_1 , la podem ajustar per una corba sinusoidal (corba vermella), mentre que en el cas d'espirals, mai es pot ajustar per un sinus. La funció sinus és la que normalment s'utilitza per calcular l'eix principal de la galàxia i deprojectar-la.

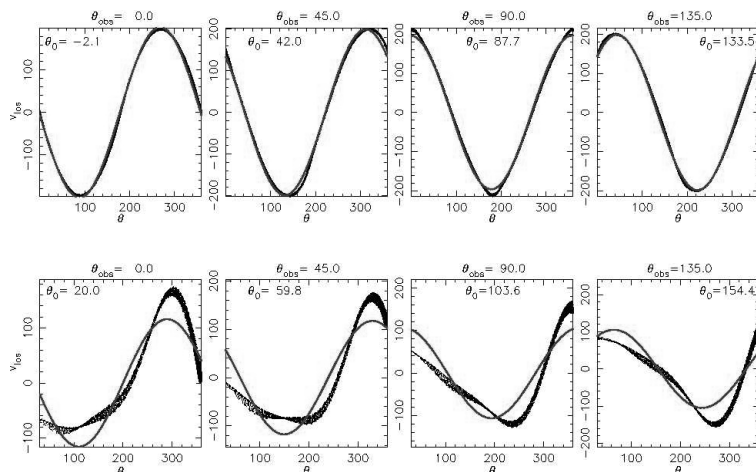


FIGURA 17: Velocitats al llarg de la línia de visió presa amb quatre angles diferents. D'esquerra a dreta: 0° , 45° , 90° i 135° . A les representacions superiors, la morfologia correspon a un anell R_1 , mentre que en les inferiors, la morfologia és de braços espirals. En cada cas, apareixen amb un traç més gruixut en negre les velocitats donades per les òrbites atrapades per les varietats invariants en funció de l'angle al llarg de la varietat, i per una línia grisa l'ajust per una corba sinusoidal. El valor θ_0 indica la posició en la qual la velocitat en la línia de visió s'anul·la.

6 Conclusions i recerca actual

La teoria de sistemes dinàmics i, en particular, el paper de les varietats invariants modelitza de manera precisa els problemes de dinàmica galàctica. Mentre que les teories anteriors sobre la formació de braços espirals i/o anells en galàxies barrades no consideren un origen comú, les varietats invariants associades a

les òrbites hiperbòliques localitzades als extrems de la barra sí que proveeixen aquesta possibilitat.

En diversos treballs hem desenvolupat aquesta teoria considerant diferents potencials galàctics i atenent als més usats pels astrònoms a fi de modelitzar galàxies amb barra. Tots tenen una component axisimètrica, que modelitza el disc, bulb i halo de la galàxia, i una component no axisimètrica, que modelitza la barra. Hi ha bàsicament dos tipus de potencials per modelitzar una barra. Un, en el qual el potencial es deriva d'una distribució de densitat i que és més «físic» en el sentit que prové d'una densitat on la barra està ben definida, és a dir, té una llargada, una amplada, una massa. Mentre que la segona opció és utilitzar el segon mode de la descomposició de Fourier de tot el potencial global de la galàxia. Aquests darrers tipus de potencial s'anomenen quadrupol o ad hoc perquè no provenen d'una distribució de densitat donada a priori.

Per a cadascun d'aquests models, hem realitzat comparacions amb observacions i/o hem proporcionat eines de predicció per tal de comprovar si la teoria és plausible. En els tests referents a la morfologia dels anells i espirals hem comprovat que les prediccions s'ajusten bé a la realitat. També hem comprovat que l'efecte del gas en les espirals no afecta la forma de les varietats invariants de manera inadequada, sinó que precisament fa que siguin més estretes. Finalment, hem comprovat que la velocitat en la línia de visió per a morfologies de tipus anell es pot ajustar amb una corba sinusoidal, mentre que si la galàxia té dos braços espirals, no es pot ajustar per un sinus. Aquest fet té conseqüències en el procés de càlcul de l'angle de posició d'una galàxia.

Pel que fa a morfologies més especials, la formació dels ansae als extrems de la barra i la dinàmica associada també queda descrita en un marc comú. Actualment estem usant la teoria per a explicar la formació dels anomenats *warps*. Aquests són deformacions del disc i dels braços espirals en la direcció z , és a dir, fora del pla, tal com passa a la galàxia del signe integral que podem veure a la figura 18. Per les simulacions fetes, sembla que aquest fenomen estaria associat a la precessió de la barra [4].

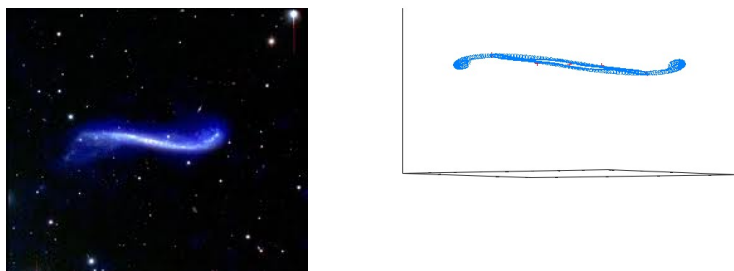


FIGURA 18: Esquerra: Vista tansversal de l'anomenada *galàxia del signe integral* (UGC 3697) en la qual podem apreciar la curvatura dels braços en la direcció z . Dreta: Una simulació on les varietats invariants queden corbades respecte de la barra i observacionalment reproduirien el mateix patró.

Agraïments

Aquest treball ha estat parcialment finançat pels ajuts MINECO-FEDER AYA2009-14648-C02-01, AYA2010-12176-E, AYA2012-39551-C02-01, MTM2009-06973, MTM2012-31714, per l'AGAUR 2009SGR-D-D859-E i pel CONSOLIDER CSD2007-00050. Agraïm també l'ajut de l'Agrupació Astronòmica de Manresa.

Referències

- [1] ATHANASSOULA, E.; ROMERO-GÓMEZ, M.; BOSMA, A.; MASDEMONT, J. J. «Rings and spirals in barred galaxies - II. Ring and spiral morphology». *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.*, 400 (4) (2009), 1706-1720.
- [2] ATHANASSOULA, E.; ROMERO-GÓMEZ, M.; BOSMA, A.; MASDEMONT, J. J. «Rings and spirals in barred galaxies - III. Further comparisons and links to observations». *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.*, 407 (3) (2010), 1433-1448.
- [3] ATHANASSOULA, E.; ROMERO-GÓMEZ, M.; MASDEMONT, J. J. «Rings and spirals in barred galaxies - I. Building blocks». *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.*, 394 (1) (2009), 67-81.
- [4] BARAJAS, D. «Precessing models and eventual links with galaxy warps». Màster Tesi. Facultat de Matemàtiques i Estadística, UPC, Barcelona, 2011.
- [5] BINNEY, J.; TREMAINE, S. *Galactic dynamics*. 2a ed. Princeton, Nova Jersey: Princeton University Press, 2008. (Princeton Series in Astrophysics)
- [6] BOSMA, A. «21-cm line studies of spiral galaxies. I - Observations of the galaxies NGC 5033, 3198, 5055, 2841, and 7331. II - The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types». *Astronom. J.*, 86 (1981), 1791-1846.
- [7] BUTA, R. J. «The structure and dynamics of ringed galaxies. I - The morphology of galaxy rings, and statistics of their apparent shapes, relative sizes, and apparent orientations with respect to bars». *Astrophys. J.*, 61 (1986), 609-630.
- [8] BUTA, R. J. «The catalog of southern ringed galaxies». *Astrophys. J. Suppl.*, 96 (1995), 39-116.
- [9] BUTA, R. J.; CORWIN JR, H. G.; ODEWAHN S. C. *The Vaucouleurs Atlas of Galaxies*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [10] BUTA, R. J.; CROCKER, D. A. «The outer Lindblad resonance and the morphology of early type disk galaxies». *Astronom. J.*, 102 (1991), 1715-1723.
- [11] CONLEY, C. C. «Low energy transit orbits in the restricted three-body problem». *SIAM J. Appl. Math.*, 16 (1968), 732-746.
- [12] CONTOPOULOS, G. *Order and chaos in dynamical astronomy*. Berlín: Springer-Verlag, 2002. (Astronomy and Astrophysics Library)
- [13] CONTOPOULOS, G.; PAPAYANNOPOULOS, TH. «Orbits in weak and strong bars». *Astronom. and Astrophys.*, 92 (1-2) (1980), 33-46.

- [14] DEHNEN, W. «The effect of the outer Lindblad resonance of the Galactic bar on the local stellar velocity distribution». *Astronom. J.*, 119 (2) (2000), 800–812.
- [15] FERRERS, N. M. «On the potentials of ellipsoids, ellipsoidal shells, elliptic laminae und elliptic rings of variable densities». *Quart. J.*, 14 (1876), 1–22.
- [16] FUX, R. «Order and chaos in the local disc stellar kinematics induced by the Galactic bar». *Astronom. and Astrophys.*, 373 (2) (2001), 511–535.
- [17] GÓMEZ, G.; KOON, W. S.; LO, M. W.; MARSDEN, J. E.; MASDEMONT, J.; ROSS, S. D. «Connecting orbits and invariant manifolds in the spatial restricted three-body problem». *Nonlinearity*, 17 (5) (2004), 1571–1606.
- [18] KOON, W. S.; LO, M. W.; MARSDEN, J. E.; ROSS, S. D. «Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics». *Chaos*, 10 (2) (2000), 427–469.
- [19] KUZ'MIN, G. G. «A stationary galaxy model admitting triaxial velocity distribution». *Astronomicheskii Zhurnal*, 33 (1956), 27–45. [En rus]
- [20] LIN, C. C.; SHU, F. H. «On the spiral structure of disk galaxies». *Astrophys. J.*, 140 (1964), 646–655.
- [21] LIN, C. C.; SHU, F. H. «On the spiral structure of disk galaxies, II. Outline of a theory of density waves». *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 55 (2) (1966), 229–234.
- [22] LLIBRE, J.; MARTÍNEZ, R.; SIMÓ, C. «Transversality of the invariant manifolds associated to the Lyapunov family of periodic orbits near L_2 in the restricted three-body problem». *J. Differential Equations*, 58 (1) (1985), 104–156.
- [23] MA, J.; ZHAO, J. L.; SHU, C. G.; PENG, Q. H. «Some statistical properties of spiral galaxies». *Astronom. and Astrophys.*, 350 (1999), 31–37.
- [24] MARTÍNEZ-GARCÍA, E. «Testing theories in barred-spiral galaxies». *Astrophys. J.*, 744 (2) (2012), 92–105.
- [25] MCGEHEE, R. P. «Some homoclinic orbits for the restricted three-body problem». Tesi doctoral. Universitat de Wisconsin-Madison, 1969.
- [26] MIYAMOTO, M.; NAGAI, R. «Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies». *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 27 (1975), 533–543.
- [27] PATSIS, P. A.; SKOKOS, CH.; ATHANASSOULA, E. «Orbital dynamics of three-dimensional bars - IV. Boxy isophotes in face-on views». *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.*, 342 (1) (2003), 69–78.
- [28] PFENNIGER, D. «The 3D dynamics of barred galaxies». *Astronom. and Astrophys.*, 134 (2) (1984), 373–386.
- [29] ROMERO-GÓMEZ, M.; ATHANASSOULA, E.; MASDEMONT, J. J.; GARCÍA-GÓMEZ, C. «The formation of spiral arms and rings in barred galaxies». *Astronom. and Astrophys.*, 472 (1) (2007), 63–75.

- [30] ROMERO-GÓMEZ, M.; MASDEMONT, J. J.; ATHANASSOULA, E.; GARCÍA-GÓMEZ, C. «The origin of rR_1 ring structures in barred galaxies». *Astronom. and Astrophys.*, 453 (1) (2006), 39–45.
- [31] ROMERO-GÓMEZ, M.; MASDEMONT, J. J.; GARCÍA-GÓMEZ, C.; ATHANASSOULA, E. «The role of the unstable equilibrium points in the transfer of matter in galactic potentials». *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 14 (12) (2009), 4123–4138.
- [32] SCHWARZ, M. P. «The response of gas in a galactic disk to bar forcing». *Astrophys. J.*, 247 (1981), 77–88.
- [33] SCHWARZ, M. P. «How bar strength and pattern speed affect galactic spiral structure». *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.*, 209 (1984), 93–109.
- [34] SCHWARZ, M. P. «A re-examination of some bar-driven models of spiral structure». *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.*, 212 (1985), 677–686.
- [35] SHETH, K. [et al.]. «Evolution of the bar fraction in COSMOS: quantifying the assembly of the Hubble sequence». *Astrophys. J.*, 675 (2) (2008), 1141–1155.
- [36] SZEBEHELY, V. G. *Adventures in celestial mechanics. A first course in the theory of orbits*. Austin, TX: University of Texas Press, 1989.
- [37] TOOMRE, A. «On the distribution of matter within highly flattened galaxies». *Astrophys. J.*, 138 (1963), 385–392.
- [38] DE VAUCOULEURS, G. «Classification and morphology of external galaxies». A: *Astrophysics IV: Stellar Systems*. Berlín-Heidelberg: Springer, 1959, 275–310. (Handbuch der Physik; 53)
- [39] WIDROW, L. M.; PYM, B.; DUBINSKI, J. «Dynamical blueprints for galaxies». *Astrophys. J.*, 679 (2) (2008), 1239–1259.

MERCÈ ROMERO-GÓMEZ

DEPARTAMENT D'ASTRONOMIA I METEOROLOGIA

INSTITUT DE CIÈNCIES DEL COSMOS (ICC)

UNIVERSITAT DE BARCELONA (IEEC-UB)

MARTÍ I FRANQUÈS, 1

08028 BARCELONA

mromero@am.ub.es

PATRICIA SÁNCHEZ-MARTÍN, JOSEP J. MASDEMONT

IEEC-UPC I DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA I

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

DIAGONAL, 647 (ETSEIB)

08028 BARCELONA

patricia.sanchez.martin@upc.edu, josep@barquins.upc.edu

Aplicacions quadràtiques que preserven l'àrea a $\mathbb{R}^2$

CARLES SIMÓ

Resum: Considero la descripció, explicació i predicció de les propietats de les òrbites d'un sistema donat com un dels objectius principals dels sistemes dinàmics. En aquesta lliçó ens centrem en les aplicacions quadràtiques que preserven l'àrea (APM) a $\mathbb{R}^2$. Hi ha diverses raons per a aquesta elecció. En primer lloc, són un model paradigmàtic. A més, molts problemes referents a l'existència de corbes invariants difeomorfes a un cercle, el paper de les varietats invariants de punts fixos o periòdics de tipus hiperbòlic i com porten a l'existència de caos, els mecanismes geomètrics que porten a la destrucció de corbes invariants, i mesures quantitatives de les diferents propietats d'APM generals es poden entendre gràcies al nostre coneixement del cas quadràtic. En aquest article passem revista a alguns d'aquests temes. Al final es presenten diverses qüestions obertes i extensions a dimensió superior.

Paraules clau: aplicacions quadràtiques que preserven l'àrea, corbes invariants, varietats invariants, caos, mesures quantitatives.

Classificació MSC2010: 37E30, 37A05, 37E40, 37C29.

1 Introducció

Donada una aplicació $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ estem interessats en el comportament dels iterats dels punts de $\mathbb{R}^2$ (o d'algun subconjunt connex de $\mathbb{R}^2$). Si $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ és un punt inicial qualsevol, volem veure quin és el comportament dels iterats $z_{k+1} = F(z_k)$. El conjunt $\{z_k, k \in \mathbb{N}\}$ s'anomena l'òrbita de z_0 .

Hi ha diverses maneres d'obtenir un sistema dinàmic descrit per una aplicació F . Podem donar explícitament l'aplicació o bé considerar una equació diferencial ordinària autònoma (EDO) $dz/dt = f(z)$ i definir $F(z)$ com la imatge d'un punt z pel flux de l'EDO després d'un temps τ fixat: $F(z) = \varphi(\tau, z)$ o, simplement, $\varphi_\tau(z)$, que s'anomena *l'aplicació temps- τ* .

Aquest article es basa en la lliçó inaugural del curs acadèmic 2013–2014 de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, impartida per l'autor. Una primera versió d'aquest text, en anglès, va aparèixer a les Publicacions de la Universitat de Barcelona. La presentació està disponible a l'enllaç <http://www.maia.ub.es/dsg/2013/>.

Agraïm a Narcís Miquel i Arturo Vieiro la traducció al català de l'article original.

Una altra manera interessant d'arribar a una aplicació F és usant l'anomenada *aplicació de Poincaré*. Per a una EDO, $dw/dt = f(w)$, en $\mathbb{R}^3$ (o en un subconjunt connex d'aquest espai, o en una varietat 3D), sigui Σ una superfície en $\mathbb{R}^3$ definida, per exemple, per $g(w) = 0$, on suposem que g és prou regular. Si el flux de l'EDO interseca Σ transversalment (és a dir, $f(w)$ no és tangent a Σ en cap punt $w \in \Sigma$) podem fer el següent. Prenem un punt inicial $w \in \Sigma$ i busquem la solució $\varphi(t, w)$ que té w com a condició inicial. Si existeix $t = t(w) > 0$ per al qual $\varphi(t(w), w) \in \Sigma$ i $\varphi(t, w) \notin \Sigma$ per a $0 < t < t(w)$, definim aquest punt $\varphi(t(w), w)$ com la imatge $\mathcal{P}(w)$ de w per l'aplicació de Poincaré $\mathcal{P}$. Aquesta aplicació està definida sobre la varietat Σ , que és 2D.

Cal destacar el cas en què el camp vectorial f prové d'un hamiltonià amb 2 graus de llibertat, en un nivell d'energia fixat. Un *sistema d'equacions hamiltonià* amb n graus de llibertat i hamiltonià $H(q, p)$ és de la forma

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

per a $(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (o en varietats adequades). Se segueix de manera immediata que el valor de $H(q, p)$ es preserva al llarg de les solucions de l'EDO. A aquest valor se'l coneix per l'*energia*. Per a $n = 2$, si considerem un valor de l'energia fixat, tenim una EDO en 3D. Si a més podem definir una aplicació de Poincaré com abans, obtenim una aplicació sobre una varietat 2D, Σ .

En aquest cas, l'aplicació $\mathcal{P}$ té una propietat important: *preserva l'àrea a Σ* . Així, d'ara en endavant podem simplificar la presentació. Considerarem $\mathbb{R}^2$ en comptes d'una superfície general Σ , denotarem l'aplicació simplement per F i, a més, suposarem que preserva l'àrea. Això implica que $\det(DF(z)) = 1$ per a tota $z \in \mathbb{R}^2$, on DF representa la diferencial de F . Per simplificar la notació ens referirem a les aplicacions que preserven l'àrea amb el terme APM (de les seves sigles en anglès, *area preserving maps*).

D'entre totes aquestes aplicacions, el cas més simple és el d'aplicacions polinomials F de grau 1. Són de la forma $F(z) = Mz + b$, $b \in \mathbb{R}^2$, on M és una matriu 2×2 . Llevat dels casos trivials en què M té un valor propi doble igual a 1, es pot suposar que $b = 0$, traslladant l'origen. Els valors propis de M són de la forma

- 1) $\exp(\pm i\alpha)$, $\alpha \in (0, \pi)$, cas conegut com *el·líptic*,
- 2) λ, λ^{-1} , $\lambda > 1$, cas conegut com *hiperbòlic*,
- 3) 1 doble, però M no es pot diagonalitzar, cas conegut com de *cisallament*.

Hi ha dos altres casos que poden aparèixer: una parella de valors propis λ, λ^{-1} , $\lambda < -1$ (cas conegut com *hiperbòlic amb reflexió*), i -1 doble, de nou amb M no diagonalitzable. Es redueixen als 2) i 3) anteriors component l'aplicació amb la simetria central - Id o prenent F^2 en comptes de F .

En els tres casos considerats, després d'un canvi de coordenades, la matriu M es pot reduir a una de les formes següents:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

En el cas el·líptic, segons (2), la dinàmica és essencialment una rotació. Tots els punts tenen òrbites acotades, confinades en el·lipses. Cal notar que si α és de la forma $\alpha = \frac{m}{n} 2\pi$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $(m, n) = 1$, llavors tots els punts són fixos per F^n , una situació extremament degenerada. És a dir, tots els punts són periòdics amb període minimal n . Recordem que un punt z es diu que és *periòdic amb període minimal* $n > 1$ si $F^n(z) = z$ i $F^k(z) \neq z$ per a $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

En el cas hiperbòlic, la dinàmica és de tipus sella. Escrivint $F(x, y) = (\lambda x, \lambda^{-1}y)$, segons (2), tots els punts amb $x_0 \neq 0$ s'escapen a l'infinit, mentre que aquells amb $x_0 = 0$ tendeixen a l'origen.

En el cas de cisallament, per a $b = 0$ i d'acord amb (2), podem escriure l'aplicació F com $F(x, y) = (x + y, y)$. Tots els punts amb $y_0 \neq 0$ tendeixen a infinit, mentre que els punts amb $y_0 = 0$ són fixos.

La figura 1 mostra els tres casos, amb un punt inicial representat per 0, i les imatges respectives representades per 1, 2, 3, ... És molt important notar que en aquest cas lineal *tots els iterats pertanyen a corbes* que són solució d'una EDO lineal, que preserva l'àrea. És a dir, l'EDO està associada a un hamiltonià quadràtic. De fet, hi ha un hamiltonià tal que l'aplicació F coincideix amb l'aplicació temps-1 del flux hamiltonià.

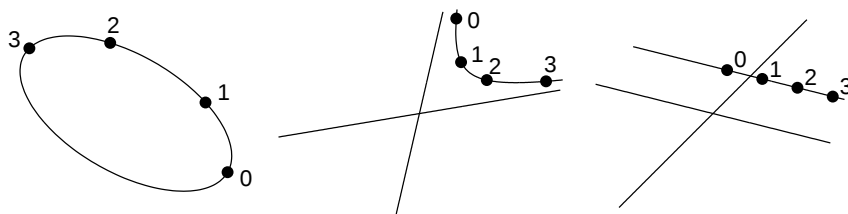


FIGURA 1: Exemples de la dinàmica dels tres models d'aplicacions lineals. D'esquerra a dreta: rotació, sella i cisallament. Les formes normals de les matrius corresponents són les donades a (2).

Si per a una aplicació general F de $\mathbb{R}^2$ existeix una funció no constant G que és invariant per F , és a dir $G(F(z)) = G(z)$, diem que l'aplicació és *integrable*.

El primer que se'n acut és el cas de les *aplicacions quadràtiques* definides per $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$, on les funcions F_1 i F_2 són polinomis quadràtics en (x, y) . Aquest cas és extremament rellevant, perquè

- Permet fer una reducció que fa decreixer de manera molt important el nombre de paràmetres involucrats en l'aplicació. A més, té algunes simetries rellevants i una interpretació geomètrica molt simple. Aquest és el contingut de la secció 2.
- Apareix de manera natural com una aproximació molt bona en algunes parts de $\mathbb{R}^2$ quan considerem una APM arbitrària. En particular, quan estudiem aplicacions de Poincaré de hamiltonians amb 2 graus de llibertat.

- c) És un model paradigmàtic. Molts problemes relacionats amb l'existència de corbes invariants difeomorfes a $\mathbb{S}^1$ (secció 4), com ara el rol de les varietats invariants de punts hiperbòlics, fixos o periòdics, i com duen a l'existència de caos (secció 5), els mecanismes geomètrics que duen a la destrucció de corbes invariants (secció 6), i mesures quantitatives de diverses propietats (seccions 7 i 8) per a APM generals [26], es poden entendre gràcies al coneixement actual del cas quadràtic.

Finalment, és interessant ressaltar que les APM quadràtiques són *analítiques*, fet que permet usar resultats útils per a aplicacions analítiques, i encara més: són *aplicacions enteres*. Per a una discussió completa de les propietats de diferents tipus d'aplicacions d'Hénon i algunes aplicacions, vegeu [19]. Diverses figures i idees que aquí es presenten s'han extret d'aquest article. En el que segueix, per fixar idees, totes les APM es consideraran analítiques.

Diverses qüestions romanen encara obertes, i algunes d'aquestes es presenten a la secció 9.

2 Reducció i simetries

A finals dels seixanta, Michel Hénon [13] va iniciar l'estudi de les APM quadràtiques. Més tard, a mitjans del setanta, va estudiar el cas dissipatiu [14]. En el cas que va considerar, el jacobíà és constant, però amb valor absolut més petit que 1. Aquí apareix el popular *atractor d'Hénon*.

Un fet remarcable, que no és difícil de provar, és que la condició de tenir jacobíà constant permet, via escalats adequats de les variables i traslladant l'origen de forma adient, escriure una aplicació quadràtica genèrica de $\mathbb{R}^2$ de la forma:

$$F: (x, y) \rightarrow (1 - ax^2 + y, bx) \quad (3)$$

per a certes constants a, b . Quan a tendeix a 0, l'escalat s'ha de fer de manera lleugerament diferent. Òbviament, el jacobíà és igual a $-b$ i, per tant, el cas conservatiu s'obté per a $b = -1$.

El cas conservatiu té una interpretació geomètrica molt simple. Es tracta de la composició de dues aplicacions. La primera és $(x, y) \rightarrow (x, y + 1 - ax^2)$, una de les anomenades aplicacions de *de Jonquières*, mentre que la segona és simplement una rotació d'angle $-\pi/2$. La figura 2 mostra, per a $a = -1/2$, el quadrat $[-3, 3]^2$ (en gris molt fosc), la seva primera imatge (en gris fosc) i part de les dues imatges consecutives següents (en gris i gris clar, respectivament). Ens podem preguntar si, en iterar, tots els punts s'escaparan. Com a resposta a aquesta pregunta, dibuixem en negre el conjunt de punts que romanen acotats per a qualsevol nombre d'iteracions, per al valor de a seleccionat. Aquest és el tipus d'objectes que volem estudiar, així com la seva evolució en funció del paràmetre.

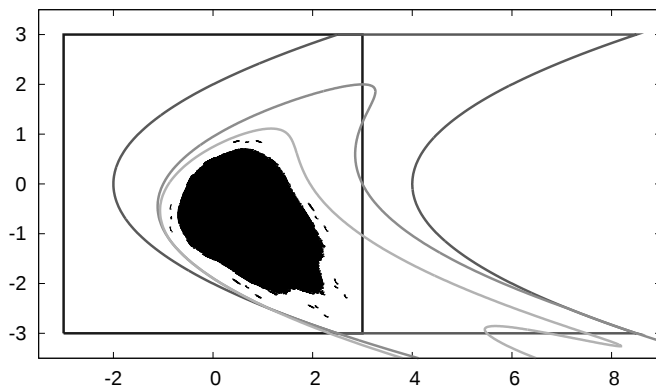


FIGURA 2: El quadrat $[-3, 3]^2$ (en gris molt fosc) i les seves tres primeres imatges per l'aplicació d'Hénon amb $a = -0.5$, $b = -1$, mostrades en gris fosc, gris i gris clar, respectivament. Les dues últimes tenen parts fora del rang mostrat. El conjunt en negre és el conjunt invariant de punts que romanen acotats per qualsevol nombre d'iteracions.

Una representació millor de l'APM quadràtica, que usarem d'ara en endavant, és

$$F_c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + 2y + \frac{c}{2}(1 - (x + y)^2) \\ y + \frac{c}{2}(1 - (x + y)^2) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

on és suficient considerar $c > 0$. Aquesta nova forma s'obté amb una petita modificació de la versió usada en [34]. El subíndex c de F_c l'escrivim per emfatitzar que l'aplicació depèn d'aquest paràmetre. L'aplicació té dos punts fixos. Un està situat a $(-1, 0)$ i és hiperbòlic per a qualsevol $c > 0$. L'altre està a $(1, 0)$ i és el·líptic per a $0 < c < 2$, *parabòlic* (de fet, de cisallament) per a $c = 2$ i hiperbòlic amb reflexió per a $c > 2$.

Es pot comprovar fàcilment que la inversa de l'aplicació F_c es pot expressar per $F_c^{-1} = SF_cS$, on S és la simetria $S(x, y) = (x, -y)$. Així, si definim $R = SF_c$, que és també una involució com S , tenim $F_c = SR$ i $F_c^{-1} = RS$. Les dues aplicacions S i R s'anomenen *reversors*. Podem considerar conjunts de punts fixos pels dos reversors, és a dir, punts $z = (x, y)$ tals que $S(z) = z$ (que són els punts amb $y = 0$), o bé uns punts per als quals $R(z) = z$, que pertanyen a una paràbola.

L'existència de reversors d'una aplicació F té una conseqüència important: si K és un reversor i z^* és un punt del conjunt $\text{Fix}(K)$ de punts fixos de K , llavors, si existeix $m \in \mathbb{N}$ tal que $F^m(z^*) \in \text{Fix}(K)$, el punt z^* és periòdic per F . Òbviament, si $F^m(z^*) = z^*$, té període m , i si $F^m(z^*) \neq z^*$, té període $2m$. És clar que un punt fix també es pot considerar com a periòdic de període 1.

Per a estudiar les propietats locals (lineals) d'un punt periòdic z^* de període m , és suficient considerar l'aplicació lineal definida per $DF^m(z^*)$ i usar la descripció de la dinàmica donada a la secció 1. D'acord amb això, el punt s'anomenarà el·líptic, hiperbòlic, hiperbòlic amb reflexió o, si els valors propis de $DF^m(z^*)$ són $+1$ doble o -1 doble, parabòlic.

3 Un flux límit: comparació amb les aplicacions discretes

Un procediment útil per a l'estudi preliminar de la dinàmica d'una aplicació F , en el cas que aquesta sigui *propèria a la identitat*, consisteix a buscar l'existència d'una EDO de tal manera que l'aplicació temps-1 associada al flux sigui una bona aproximació de F . La forma de (4) suggereix introduir noves variables $(\xi, \eta) = (x, 2y/\sqrt{c})$. Ara, en les variables (ξ, η) , F_c difereix de la identitat en una quantitat $\mathcal{O}(\sqrt{c})$. És elemental que si considerem F_c , que ens passa de les variables (ξ, η) a les variables $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, llavors $\tilde{\xi} = \xi + \sqrt{c}\eta + \mathcal{O}(c)$, $\tilde{\eta} = \eta + \sqrt{c}(1 - \xi^2) + \mathcal{O}(c)$. La variació de les variables (ξ, η) per unitat de temps és $(\sqrt{c}\eta, \sqrt{c}(1 - \xi^2) + \mathcal{O}(c))$. Un escalat del temps, també pel factor $\sqrt{c}$, i fer tendir c cap a zero, ens proporciona l'EDO

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = 1 - \xi^2, \quad (5)$$

que és hamiltoniana amb $H(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\eta^2 - \xi + \frac{1}{3}\xi^3$ (vegeu (1)). Així, les solucions estan contingudes en les corbes de nivell de H . La dinàmica de (5) és elemental i les seves propietats principals s'il·lustren a la figura 3, esquerra. També té $(-1, 0)$ i $(1, 0)$ com a punts fixos, els quals són hiperbòlic i el·líptic, respectivament.

El nivell $H = 2/3$ del punt fix hiperbòlic conté dues branques no acotades (la superior és, de fet, una branca de $W^{s,+}$, la *varietat estable* del punt fix, mentre que la inferior és una branca de $W^{u,-}$, la *varietat inestable* d'aquest punt) i una branca acotada que tanca un domini de $\mathbb{R}^2$. Aquesta última branca de les varietats invariants es coneix per *separatriu*, i està formada per les dues altres branques de les varietats que, de fet, coincideixen: $W^{s,-} = W^{u,+}$. Tots els punts no acotats per la separatriu s'escapen a l'infinit, a excepció dels punts de $W^{s,+}$. Els punts dins del conjunt acotat per la separatriu es mouen en òrbites periòdiques de l'EDO al voltant del punt el·líptic. Aquestes òrbites folien aquest domini acotat.

La separatriu és la solució de (5) amb condició inicial $(2, 0)$ per a $t = 0$ i va des de $\xi = -1$ fins a $\xi = 2$. El valor més gran que pren $|\eta|$ és $\sqrt{8/3}$. A més, cal dir que aquesta solució és el cas límit d'una funció el·líptica que tendeix a $(-1, 0)$ per a $t \rightarrow \pm\infty$ i que té una *singularitat* en $t = i\pi/\sqrt{2}$.

El període de les òrbites periòdiques al voltant del punt fix $(1, 0)$ tendeix a $\sqrt{2}\pi$ quan aquestes s'acosten al punt fix, i tendeix a ∞ quan s'apropen a la separatriu. El període creix de manera monòtona, la qual cosa és conseqüència d'algunes propietats simples de les funcions el·líptiques.

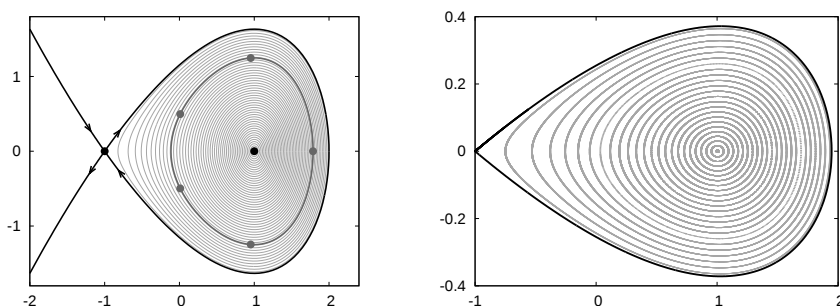


FIGURA 3: A l'esquerra: espai de fase del sistema (5). Els punts fixos es mostren en negre, així com les varietats invariants del punt hiperbòlic. Les òrbites periòdiques es mostren en gris clar. Vegeu el cos del text per als detalls sobre les òrbites periòdiques que es mostren en gris fosc. A la dreta: les branques de la dreta de les varietats invariants del punt fix hiperbòlic i (part de) les òrbites de F_c per a diverses condicions inicials, per a $c = 0.2$.

Com es pot comparar el comportament descrit amb el de F_c per a c petita? A la dreta de la figura 3, prenent condicions inicials en l'eix de les x amb valors 1.01 (0.04) 1.93, per al valor $c = 0.2$, es mostren 5 000 punts de cada òrbita de F_c , després d'un transitori de 10^6 iterats.

Les separatrius de l'aplicació semblen coincidents, però en realitat no ho són (vegeu secció 5). Les òrbites que es mostren sembla que estiguin sobre corbes invariants. Probablement la majoria pertanyin a una d'aquestes corbes, però si es fan càlculs amb cura, es pot comprovar que hi ha un petit interval de punts inicials a prop de $x = 1.741\,262\,421\,4$ on algunes òrbites semblen ser caòtiques. És clar que si es prenen condicions inicials en el costat oposat del punt fix el·líptic, en el rang $[-0.083\,43, -0.082\,46]$ aproximadament, les òrbites no estan sobre corbes invariants al voltant del punt el·líptic.

El que provoca aquesta dificultat a l'hora d'interpretar el que s'observa al gràfic de la dreta de la figura 3 i quina és la dinàmica real es discutirà a les seccions 4, 5 i 6.

Una característica important dels punts l'òrbita dels quals és una corba invariant és el *número de rotació*. Aquest mesura la mitjana de la fracció de revolució que gira un punt per a cada iterat. Considerant els angles respecte del punt fix el·líptic (mesurat en el sentit de les agulles del rellotge) no a $\mathbb{S}^1$, sinó en l'aixecament a $\mathbb{R}$, si denotem per θ_k l'angle del k -èsim iterat, el número de rotació es defineix com

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\theta_k}{k}. \quad (6)$$

Aquest número sempre existeix i no depèn de la condició inicial sobre la corba. És clar, però, que el valor de ρ depèn de la corba invariant. Si les corbes invariants es parametritzen pel punt x en què intersequen l'eix de les x a la

dreta del punt el·líptic, podem escriure $\rho = \rho(x)$. Hi ha molts mètodes per a calcular ρ , i la majoria no depenen ni de l'existència d'un punt central (com s'ha considerat abans) ni de la dimensió de l'espai on estigui definida l'aplicació. Vegeu [11, 12, 24].

En el cas del flux, podem definir l'aplicació temps-1 associada, φ_1 , com s'ha fet a la secció 1. El número de rotació és l'invers del període. Per poder veure la bona concordança entre les parts dreta i esquerra de la figura 3, en la figura 4 es mostra el número de rotació en els dos casos, com a funció de x , $x > 1$. El número de rotació del flux s'ha escalat per tenir en compte l'escalat del temps, i s'ha aplicat una petita correcció al valor inicial de x per tenir en compte, també, que les varietats de l'aplicació F_c intersequen l'eix de les x en un punt lleugerament per sota de 2.

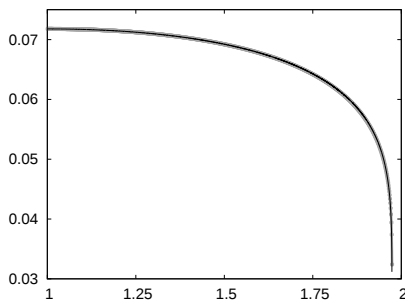


FIGURA 4: Comparació entre ρ per a l'aplicació F_c , $c = 0.2$, en punts gris clar, amb el valor per al camp (5), com a línia negra, després d'haver escalat adequadament. Noteu la concordança excel·lent a aquest nivell de resolució.

Tornant al cas del flux, hem triat un punt (el situat més a la dreta, d'entre els grisos foscos) del gràfic de l'esquerra de la figura 3 que defineix una òrbita periòdica de període 5. Aquest punt té període 5 per φ_1 , i és clar que tots els punts en aquesta òrbita periòdica del flux tenen període 5 per φ_1 . Els altres punts en gris fosc són les imatges del situat més a la dreta, per $(\varphi_1)^k$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Què passaria si haguéssim considerat l'aplicació F_c , per a c petita, com a pertorbació $\mathcal{O}(\sqrt{c})$ de l'aplicació φ_1 del flux, i busquéssim punts amb període n per iteració de F_c ? Un punt n -periòdic compleix la condició $G(z) = F_c^n(z) - z = 0$. Si escrivim $F_c^n = \varphi_1^n + \mathcal{O}(\sqrt{c})$ i busquem solucions de $G(z) = 0$ usant el teorema de la funció implícita ens trobarem que no podem fer-ho, perquè la diferencial de $\varphi_1^n - \text{Id}$ és singular. Per tant, cal usar altres mètodes.

Més generalment, podem preguntar-nos si, per a l'aplicació F_c , existeix una EDO (propera però diferent a (5)) tal que l'aplicació φ_1 associada coincideix amb F_c . Fins i tot ens podem plantejar això mateix en el cas d'aplicacions F arbitràries suposant que són properes a la identitat (bé la mateixa F o una potència d'ella en un domini adequat).

Aquest últim cas és el de les funcions F de tipus APM al voltant d'un punt fix hiperbòlic. Les òrbites de l'aplicació φ_1 d'una EDO (que es pot provar que existeix i és calculable de manera efectiva) coincideixen amb les de F mentre estiguin en un entorn del punt citat. Aquest és el contingut de la coneguda *forma normal de Birkhoff* (BNF de les seves sigles en anglès); vegeu, per exemple, [25]. A més, en un entorn d'un punt fix el·líptic, es pot calcular una BNF fins a qualsevol ordre, però, en general, *no serà convergent*. Les *formes normals* són eines molt útils que donen molta informació [1]. La idea clau és introduir una successió de transformacions que converteixin el problema original en un altre que sigui molt més fàcil d'estudiar.

Concretament, en el cas d'un punt fix hiperbòlic, existeix un canvi de variables analític, que passa a unes variables (ξ, η) en les quals l'aplicació s'escriu

$$(\xi, \eta) \rightarrow (\lambda(\xi\eta)\xi, \eta/\lambda(\xi\eta)),$$

on $\lambda(\xi\eta) = \sum_{n \geq 0} \lambda_j(\xi\eta)^j$ (convergent) i on el valor de λ_0 és el valor propi dominant en el punt fix. Notem que $\lambda(\xi\eta)$ sols depèn del producte de les variables. Aquest producte és constant per l'aplicació dins d'un cert entorn del punt fix. Òbviament, en aquest entorn, els iterats es mouen sobre hipèrbolcs de manera semblant al cas lineal.

En el cas d'un punt fix el·líptic i suposant que no hi ha ressonància, és a dir, que si la part lineal és una rotació d'angle α_0 llavors $\alpha_0 \notin 2\pi\mathbb{Q}$, hi ha una successió de canvis analítics que redueixen l'aplicació a formes del tipus

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow R_{\alpha_N}(\xi, \eta) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|(\xi, \eta)\|^{2N+1}),$$

on $R_{\alpha_N}(\xi, \eta)$ vol dir una rotació d'angle $\alpha_N(\xi, \eta)$ que depèn de les variables de la forma $\alpha_N(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^N \alpha_j(\xi^2 + \eta^2)^j$. Però per a qualsevol entorn del punt fix, la successió de residus de la forma normal, $\mathcal{O}(\|(\xi, \eta)\|^{2N+1})$, no tendeix a zero si $N \rightarrow \infty$, llevat de casos molt degenerats. No hi ha convergència en general. Els coeficients α_j s'anomenen coeficients de Birkhoff i moltes vegades s'escriuen b_j en record de Birkhoff.

És immediat escriure els camps el flux temps unitat dels quals reproduïx el que s'obté de la forma normal. En el cas hiperbòlic és $\dot{\xi} = \log(\lambda(\xi\eta))\xi$, $\dot{\eta} = -\log(\lambda(\xi\eta))\eta$, i en el cas el·líptic, en coordenades polars (r, θ) , tindrem $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \alpha_N(r^2)$.

Si estem interessats en l'existència d'una EDO de tal manera que l'aplicació φ_1 associada coincideixi globalment, és a dir, en un domini compacte K fixat, amb una aplicació propera a la identitat F , també hi ha resultats basats en tècniques de mitjanes [20, 28]. Per fixar idees, suposem que $F(z) = F_\varepsilon(z) = z + \varepsilon F_1(z, \varepsilon)$. El primer pas consisteix a construir una *suspensió*, és a dir, una equació diferencial ordinària que depengui periòdicament del temps (per exemple, amb període 1) de manera que la seva aplicació temps-1, des de $t = 0$ fins a $t = 1$, coincideixi amb l'aplicació F_ε [4]. Això és sempre possible si ε és petit. Llavors cal aplicar una *successió de transformacions* per tal de cancel·lar la dependència

del temps de l'EDO [20, 28]. En general això no és possible. La successió de camps vectorials no convergeix a un camp autònom, però si s'atura el procés en el moment adequat, que depèn de ε , es pot obtenir un camp autònom tal que la seva aplicació temps-1 difereix de $F_\varepsilon(z)$ en una quantitat acotada per $c_1 \exp(-c_2/\varepsilon)$, per a tota $z \in K$ i per a certes constants c_1 i c_2 positives. Vegeu la secció 5 per a temes relacionats, que inclouen el tipus de divergència d'aquesta successió de transformacions.

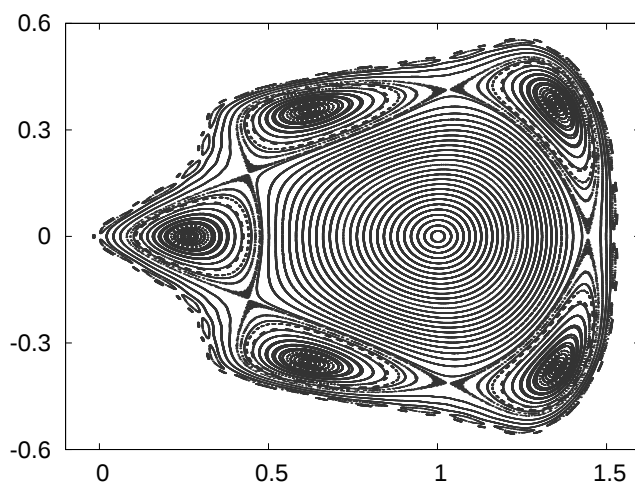


FIGURA 5: Algunes òrbites de l'aplicació F_c per a $c = 0.762$. Com abans, prenem punts inicials i il·lustrem 5 000 iterats de cada un d'ells després d'un transitori de 10^6 iterats. Ara les condicions inicials en $y = 0$ són 0.98 (-0.02) -0.02 . Els punts fora del domini que es mostra s'escapen a l'infinit apropant-se a la branca W^{u-} .

A la figura 5 s'il·lustra la situació que es troba per a valors més grans de c . Encara sembla que hi ha moltes corbes invariants al voltant del punt fix el·líptic. Lluny d'aquest punt hi trobem algunes *illes* al voltant de punts el·líptics periòdics de període 5. Prop de les zones on una illa s'apropa a les seves veïnes, és possible detectar-hi una òrbita hiperbòlica periòdica de període 5. En un entorn d'aquestes òrbites periòdiques, la dinàmica sembla caòtica: aparentment les òrbites omplen un conjunt de mesura positiva, i ja no estan sobre corbes. Prop de la perifèria, ens trobem una altra vegada amb més corbes invariants envoltant les illes de període 5 i, finalment, algunes cadenes d'illes molt petites. Aquesta estructura és típica per a APM de qualsevol tipus.

Cal notar, també, que les illes de període 5 intersequen $y = 0$ (el conjunt $\text{Fix}(S)$) a l'esquerra del punt fix el·líptic, però no a la dreta, on podem intuir que hi haurà un punt hiperbòlic de període 5. D'altres illes només poden tenir intersecció a la dreta i algunes no tenen intersecció amb $\text{Fix}(S)$, però poden

tenir-ne amb $\text{Fix}(R)$. Per fer evident l'existència d'il·les, a la figura 6 representem el valor del número de rotació en funció de x per a punts inicials triats a $\text{Fix}(S)$ (esquerra) i també per a punts inicials triats a $\text{Fix}(R)$ (dreta) per al valor $c = 0.7$. En l'últim cas només usem dades inicials a l'esquerra de $x = 1$. En ambdós casos s'observa que el màxim de ρ s'assoleix en $x = 1$. Ara bé, com veurem més endavant, això pot canviar en variar el valor de c . A la figura 6, es destaquen amb punts negres les zones on ρ és localment constant, que corresponen a il·les. En els llocs on hi ha punts periòdics hiperbòlics a prop, el valor de ρ no està definit, a causa de la manca de corbes invariants i de l'existència de punts homoclíncics transversals (vegeu seccions 5 i 6), i ρ té salts.

El número de rotació s'ha calculat després d'un transitori de 10^6 iterats usant els 10^6 iterats següents i un mètode basat en l'ordre en què els iterats es distribueixen sobre la corba invariant. S'han ignorat els valors de x per als quals els iterats s'escapen o no estan sobre corbes invariants (fet que es detecta automàticament amb aquest mètode; simplement, si mirem l'ordre dels angles que s'obtenen considerant els iterats en coordenades polars al voltant del punt el·líptic, els valors successius que prenen no són els que corresponen a una rotació rígida: un raonament purament topològic). Els números de rotació racionals detectats usant valors de x de la forma $k \times 10^{-3}$, $k \in \mathbb{Z}$, d'esquerra a dreta a la il·lustració de l'esquerra, són $3/17$, $25/141$, $13/73$, $7/39$, $11/61$, $15/83$, $23/127$, $2/11$, $5/27$, $1/5$, $4/21$, $2/11$, $8/45$, $14/79$, $10/57$ i $4/23$, tots amb denominador senar. A la il·lustració de la dreta, són $1/6$, $7/40$, $13/74$, $17/96$, $11/62$, $5/28$, $9/50$, $17/94$, $29/160$, $33/182$ i $3/16$, tots amb denominador parell.

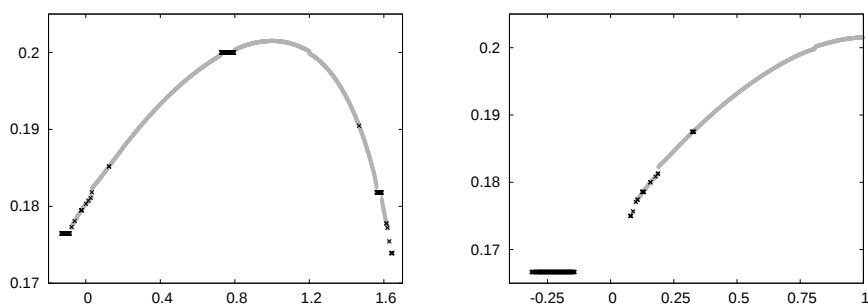


FIGURA 6: Nombre de rotació com a funció de x , per a F_c , $c = 0.7$. A l'esquerra: s'han pres punts inicials en $y = 0$. A la dreta: s'han considerat punts inicials en el conjunt $\text{Fix}(R)$ amb el valor de y més petit. Els punts negres indiquen els valors per als quals el número de rotació és racional i corresponen a il·les. Vegeu el text per a més detalls.

4 L'existència de corbes invariants

Ara ens interessem per resultats que assegurin l'*existència de corbes invariants*; no només per a APM quadràtiques, sinó també per a APM generals. Considerarem corbes al voltant d'un punt fix el·líptic de tal manera que, en coordenades polars centrades en aquest punt, el radi es pugui expressar com a funció de l'angle $r = r(\theta)$ o, simplement, corbes definides en un *domini anular* que tingui també la propietat que el radi es pugui expressar com a funció de l'angle usant un punt central adequat.

Primer cal que introduïm les anomenades *aplicacions twist*, les quals són *aplicacions integrables* (que admeten, per tant, una *foliació* formada per corbes invariants en un domini anular). Suposem que, per a $\theta = 0$, el radi r_0 varia en un domini $r_a < r_0 < r_b$ i denotem per $\rho(r_0)$ el número de rotació corresponent. Es diu que una APM d'aquest tipus satisfà la *condició twist* si $d\rho(r_0)/dr_0 \neq 0$. Usarem el símbol T per referir-nos a aquest tipus d'aplicacions. Per a una APM F donada, es poden obtenir aplicacions twist com a aplicacions temps-1 d'un flux que aproxima l'aplicació (bé sigui al voltant d'un punt el·líptic, en un anell, bé usant alguna forma normal).

Suposem que l'aplicació en què estem interessats és una *pertorbació* d'una aplicació twist: $F_\varepsilon = T + \varepsilon P$, on P és una funció normalitzada de manera que tingui alguna norma igual a 1. Per hipòtesi, T té corbes invariants. Podem assegurar que *subsisteixen* per a F_ε ? El resultat ve donat pel conegut *teorema del twist de Moser*.

TEOREMA. Considerem una pertorbació $F_\varepsilon = T + \varepsilon P$ d'una aplicació twist T . Si tenim una corba invariant de T amb número de rotació diofàntic γ , aquesta corba subsisteix, lleugerament deformada, per F_ε sempre que ε sigui suficientment petit.

En aquest moment cal que introduïm una definició: la de *nombre diofàntic*. És clar que qualsevol nombre irracional γ es pot aproximar per nombres racionals tant com vulguem. El problema és que per tenir una bona aproximació necessitem racionals amb *denominadors grans*. Així, si p/q , $q > 0$, és una aproximació racional de γ , podem mesurar quina és la diferència comparant-la amb una potència de $1/q$. Més concretament, diem que γ satisfà una (C, τ) -*condició diofàntica* (per simplificar (C, τ) -DC o simplement DC, de les sigles en anglès de diophantine condition), si $|\gamma - p/q| > C/q^\tau$ per a certs $C > 0$ i $\tau \geq 2$ i per a qualsevol $p/q \in \mathbb{Q}$. És fàcil comprovar que si fixem $\tau > 2$, el conjunt de $\gamma \in \mathbb{R}$ que no satisfan una (C, τ) -DC per a cap $C > 0$ té mesura zero. Entre els nombres diofàntics, el millor és la *raó àuria*, $g = (\sqrt{5} - 1)/2$, en el sentit que satisfà una DC amb $\tau = 2$ (que és el valor mínim que pot prendre τ), i el valor màxim de C que, per a racionals amb denominador que tendeixi a ∞ , tendeix a $1/\sqrt{5} \approx 0.4472136$. El pitjor valor de C per a g s'assoleix per a $p/q = 2/3$. En aquest cas, $C = (9\sqrt{5} - 21)/2 \approx 0.4376941$.

Així, tenim tres condicions que ens garanteixen que F_ε tindrà una corba invariant del tipus desitjat:

- a) Ha de ser una *pertorbació* d'una aplicació twist T .
- b) El seu número de rotació γ ha de ser *diofàntic*.
- c) Ha d'estar suficientment a prop de T , és a dir, ε ha de ser *petit*.

Cal comentar una mica quina és la funció de cada una d'aquestes condicions. Considerem la *representació de Fourier* de la corba invariant de T amb número de rotació γ : $r(\theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \exp(ij\theta)$. Sigui $r_\varepsilon(\theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j \exp(ij\theta)$ la representació de la corba desitjada, invariant per F_ε . La *condició d'invariància* s'expressa (en coordenades polars) per $F_\varepsilon(\theta, r_\varepsilon(\theta)) = (\theta + 2\pi\gamma, r_\varepsilon(\theta + 2\pi\gamma))$. És clar que podem fixar l'origen dels angles de manera arbitrària.

Quan intentem passar dels coeficients a_j als b_j fent una successió de canvis de variable de manera que, després del k -èsim canvi, tinguem una aproximació amb un error $\mathcal{O}(\varepsilon^{2^k})$ de la corba invariant amb $\rho = \gamma$ de F_ε , el que estem fent és aplicar el *mètode de Newton* en l'espai de les sèries de Fourier. A cada pas, hem de resoldre una equació de la forma $G(\theta + 2\pi\gamma) - G(\theta) = R(\theta)$, l'anomenada *equació homològica*, on $R(\theta)$ està relacionat amb l'error de l'aproximació anterior i té *mitjana zero*, una condició necessària per poder resoldre l'equació.

Usant representacions de Fourier per a G i R : $G = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_j \exp(ij\theta)$, $R = \sum_{j \in \mathbb{Z}} r_j \exp(ij\theta)$, $r_0 = 0$, és fàcil obtenir que $g_j = r_j / (\exp(ij2\pi\gamma) - 1)$, $j \neq 0$. Ara bé, el denominador anterior és proper a zero si $j\gamma$ és proper a un enter. Aquest és l'anomenat *problema dels divisors petits*. La DC ens permet controlar el comportament dels coeficients de G de manera que, si R és analítica en una certa banda complexa al voltant de la recta de valors reals de θ , G també és analítica (potser, però, en una banda lleugerament més estreta).

Concretament, si en un pas del procés tenim una funció R amb banda d'analicitat d'amplada Δ , les desigualtats de Cauchy ens donen cotes de la forma $|r_j| \leq M \exp(-\Delta|j|)$. Si γ satisfà una DC, llavors $j\gamma$ dista dels enters una quantitat acotada inferiorment per $C/|j|^{\tau-1}$. El denominador $\exp(ij2\pi\gamma) - 1$ té una cota inferior de l'ordre de $1/|j|^{\tau-1}$ (amb la constant que toqui). Això fa que $|g_j|$ estigui acotat per una quantitat de l'ordre de $\exp(-\Delta|j|) \times |j|^{\tau-1}$ que, a la seva vegada, es pot acotar per una exponencial amb un valor una mica més petit que Δ (i que també pot incloure l'efecte de les constants que han anat apareixent).

El problema és que l'error en l'aproximació següent *no tingui mitjana zero* i no puguem resoldre l'equació homològica següent. Aquesta mitjana es pot cancellar modificant el terme independent inicial a_0 (o, equivalentment, triant un valor adequat de g_0) i això és possible gràcies a la condició twist. És convenient expressar la condició twist en la forma $d\rho/da_0 \neq 0$, és a dir, en termes de la mitjana de la corba inicial. Finalment, el fet que ε sigui petit és condició necessària per garantir la convergència del procés de Newton. Noteu que, fixada γ , com més gran sigui la condició twist (és a dir, la magnitud $|d\rho/da_0|$), més grans són els valors de ε admissibles.

Cal mencionar, també, que la demostració de l'existència de corbes invariants per a una aplicació i un ρ donats es pot fer de manera constructiva, produint cotes rigoroses dels errors a cada pas usant *demostracions assistides per ordinador* (CAP, de les sigles en anglès de computer assisted proofs).

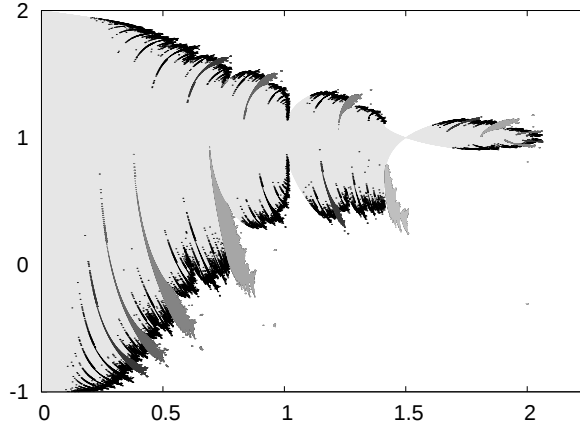


FIGURA 7: La il·lustració mostra, en funció de c , els valors de x per a punts de $\text{Fix}(S)$ per als quals s'ha calculat el nombre de rotació. Els punts en gris molt clar corresponen a punts amb $\rho \notin \mathbb{Q}$, mentre que els altres tons de gris corresponen a $\rho \in \mathbb{Q}$. Per a $\rho = m/n$ i $n = 3, 5, 7, 9, 11$, els grisos són cada vegada més foscos. Usem el negre per a altres valors racionals.

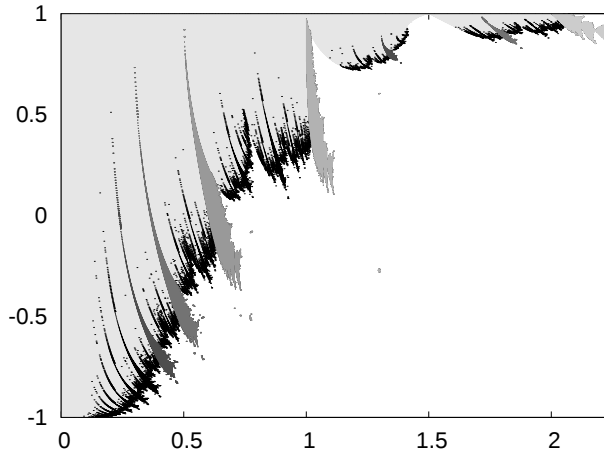


FIGURA 8: La il·lustració mostra, en funció de c , els valors de x per a punts de $\text{Fix}(S)$ per als quals s'ha calculat el nombre de rotació. Els punts en gris molt clar corresponen a punts amb $\rho \notin \mathbb{Q}$, mentre que els altres tons de gris corresponen a $\rho \in \mathbb{Q}$. Per a $\rho = m/n$ i $n = 2, 4, 6, 8, 10$, els grisos són cada vegada més foscos. Usem el negre per a altres valors racionals.

Tornant a l'APM quadràtica, és instructiu calcular números de rotació per a valors de c prenent condicions inicials a $\text{Fix}(S)$ ($y = 0$) o a $\text{Fix}(R)$, per veure on podem esperar trobar, respectivament, *corbes invariants*, *illes periòdiques*, *zones caòtiques* o, simplement, *escapament*. El resultat es mostra a les figures 7 i 8. Noteu que la majoria de les llengüetes associades amb illes arriben a $x = 1$, però són extremament estretes; per sota de la resolució de píxel. Com que els nombres racionals són densos, els dominis en gris molt clar en aquestes figures tenen, de fet, una *estructura de tipus cantoriana*. Hi ha un conjunt dens de llengüetes que cal treure del domini gris molt clar, però aquest té mesura positiva (i, de fet, relativament gran). Això està relacionat amb el fet que el conjunt de números que satisfan una (C, τ) -DC, per a $\tau > 2$ i C molt petita fixades, és un conjunt de Cantor amb *mesura gairebé total*.

Cal dir que alguns dels dominis d'illes en les figures anteriors no surten de $x = 1$. Estan relacionats amb *satèl·lits* (i satèl·lits de satèl·lits i així successivament) de les illes principals. En certa manera, l'estructura al voltant de cada illa i al voltant de les seves illes satèl·lit repeteix l'estructura del conjunt sencer, com un *objecte fractal*.

Arribats a aquest punt, pot ser instructiu veure com les illes d'un cert número de rotació donat evolucionen quan c canvia. Les illes amb número de rotació p/q neixen del punt $(1, 0)$ quan $c = 1 - \cos(2\pi p/q)$. Aquesta evolució es veu a la pel·lícula *movie1*, que es pot trobar a <http://www.maia.ub.es/dsg/QuadraticAPM>.

La qüestió següent sorgeix de manera natural: què passa si l'aplicació integrable aproximada *perd la seva condició twist*? A la figura 9 mostrem la variació de ρ en funció de x per a $c = 1.35$. Si la comparem amb la figura 6 veiem que, en primer lloc, a la figura 9 el valor de ρ en $x = 1$ és un mínim local en comptes d'un màxim. També veiem un màxim per a $x < 1$ (el màxim per a $x > 1$ està relacionat amb aquest). La condició twist es perd però continuen existint corbes invariants; vegeu la figura 10. Són les anomenades *corbes meandre*, que no es poden representar com a gràfic del radi en funció de l'angle vist des del punt el·líptic. Les corbes es pleguen (formant meandres), però hi ha eines per provar-ne l'existència [29].

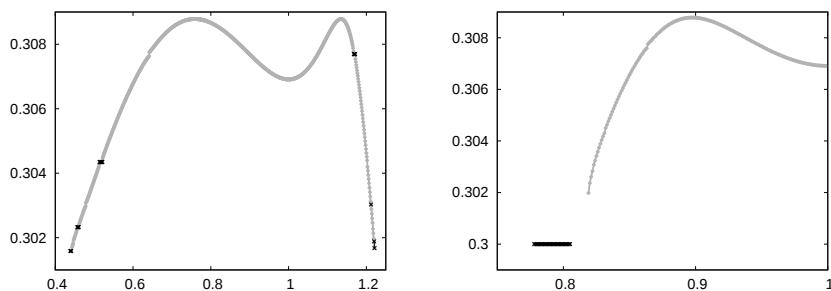


FIGURA 9: Similar a la figura 6, però per a $c = 1.35$. Es representa el valor de $\rho = \rho(x)$ per a punts inicials en $y = 0$ (esquerra), i en $\text{Fix}(R)$ (dreta). En negre es marquen els punts amb $\rho \in \mathbb{Q}$. Noteu que ara, tant a la dreta com a l'esquerra de $x = 1$, la funció ρ ja no és monòtona.

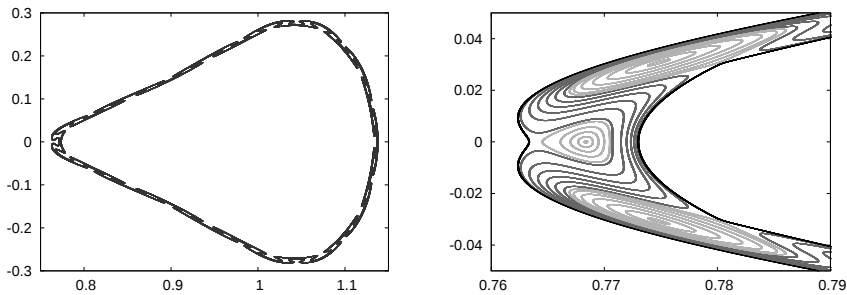


FIGURA 10: A l'esquerra es mostren un parell d'òrbites per a $c = 1.3499$, que estan en un domini on ρ passa per un màxim. Aquestes òrbites estan sobre corbes invariants, anomenades meandres. A la dreta se'n mostra una magnificació. Entre els diferents meandres en gris fosc, es poden veure dues corbes invariants ordinàries (dins i fora), i en negre, illes que pertanyen a dues cadenes d'illes diferents de número de rotació $4/13$.

Aquest tipus de corbes existeixen des de $c = 5/4$ fins a $c \approx 1.4123$. El seu número de rotació pren valors en l'interval $I = (\cos^{-1}(-1/4)/(2\pi) \approx 0.29022, \approx 0.32846)$. Estan relacionades amb la coexistència de dues illes diferents amb el mateix número de rotació. Per a qualsevol número racional $\rho \in I$ es repeteix el mateix fenomen, però en dominis extremament estrets si ρ té un denominador gran.

5 Les varietats invariants dels punts hiperbòlics i el seu paper en la creació de caos

A més de les corbes invariants d'una APM hi ha altres objectes invariants molt importants que tenen un paper clau en la dinàmica (el mateix val per a aplicacions més generals i fluxos en qualsevol dimensió). Es tracta de les *varietats invariants estable i inestable dels punts fixos hiperbòlics*, que es poden considerar una generalització de les rectes invariants mostrades al gràfic del centre de la figura 1. Un primer exemple es mostra en el gràfic de la dreta de la figura 3. Hem mencionat que en aquella figura les branques $W^{u,+}$ i $W^{s,-}$ (aquelles que comencen a la dreta de $x = -1$) semblen coincidents però que, de fet, no ho són. A la figura 11, esquerra, reproduïm aquestes varietats invariants per a $c = 0.2$ i a la imatge de la dreta mostrem una ampliació del retorn d'aquestes a un entorn del punt $(-1, 0)$, després d'haver girat en sentit horari al voltant de $(1, 0)$ en considerar iteracions per F_c (punts grisos) o en sentit antihorari iterant F_c^{-1} (punts negres). Veiem petites oscil·lacions de mida $\mathcal{O}(10^{-3})$. La figura 12 mostra varietats similars per a $c = 0.3$ i ara les oscil·lacions són deu vegades més grans, la qual cosa fa que fins i tot es puguin detectar en la representació de l'esquerra, molt a prop de $(-1, 0)$. Objectes similars apareixen si, en lloc de punts fixos, considerem òrbites periòdiques hiperbòliques.

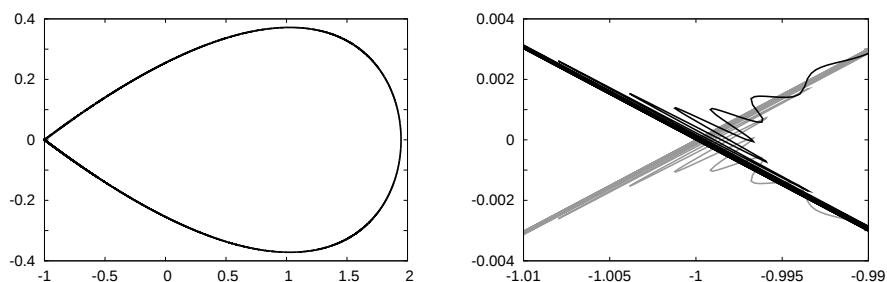


FIGURA 11: Varietats invariants inestable (en gris) i estable (en negre) del punt fix hiperbòlic per a $c = 0.2$. A la dreta es mostra una ampliació del gràfic de l'esquerra a prop del punt fix. Al gràfic de l'esquerra sembla que les varietats coincideixen. L'escissió és bastant petita.

Aquestes objectes es diuen invariants ja que es requereix que els punts en una d'aquestes corbes (W^u o W^s) s'apliquin a punts de la mateixa corba quan els iterem per F_c i per F_c^{-1} . Encara més, els punts de W^s tendeixen al punt fix hiperbòlic o a l'òrbita periòdica quan s'iteren per F_c i el mateix els succeeix als punts de W^u quan s'iteren per F_c^{-1} . La condició d'invariància també ens permet obtenir desenvolupaments locals d'aquestes varietats [27].

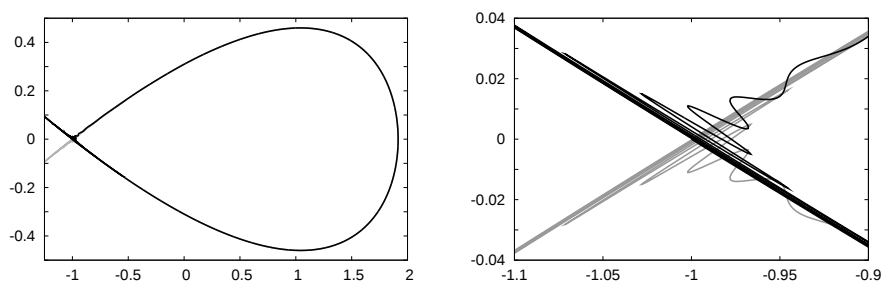


FIGURA 12: Similar a la figura 11, per a $c = 0.3$. En el gràfic de l'esquerra es comença a veure que les varietats són lleugerament diferents. L'escissió d'aquestes és petita.

Per què són rellevants? Aquestes varietats tenen una *intersecció transversal* quan creuen la recta $y = 0$ a la dreta, prop de $x = 2$. De fet, a causa de l'existència del reversor S , satisfan $W^s = S(W^u)$. Els punts on la varietat invariant estable i inestable d'un punt fix o periòdic hiperbòlic s'intersequen es coneixen per *punts homoclíncics*. Pot passar també, com veurem a la secció 6, que la varietat inestable d'un punt (fix o periòdic hiperbòlic) Z_1 intersequi la varietat estable

d'un altre punt (fix o periòdic hiperbòlic) Z_2 . En aquest cas, la intersecció és coneix per *punt heteroclínic*. És clar, a causa de la invariància, que si un punt és homoclínic (respectivament, heteroclínic), totes les *imatges i preimatges* per F també són punts homoclínics (respectivament, heteroclínics).

A mesura que s'incrementa c la manca de coincidència de W^u i W^s es fa més evident. La figura 13 mostra aquestes varietats per a $c = 0.77, 1.0$ i 1.5 .

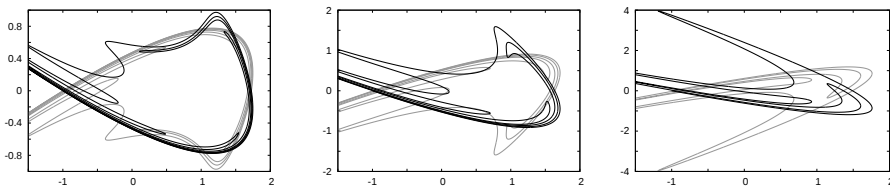


FIGURA 13: Similar a les figures 11 i 12 esquerra, però per a $c = 0.77, 1.0$ i 1.5 , d'esquerra a dreta. L'escissió de les varietats és clarament visible i creixent. Notem que, al mateix temps, el domini al voltant del punt fix el·líptic $(1, 0)$, que no queda recobert per les oscil·lacions de les varietats, es va fent més petit.

Una mesura de la manca de coincidència de les varietats estable i inestable és l'*angle d'escissió*, que es defineix com l'angle entre les dues varietats en un punt homoclínic donat. En el cas d'APM quadràtiques que considerem, podem mesurar l'angle en la *primera intersecció* de les varietats amb $y = 0$ a la dreta de $x = 1$, i veure com evoluciona en funció de c . Per fixar idees, denotem aquest angle per $\sigma(c)$. A la part superior de la figura 14 representem el valor de $\sigma(c)$ de maneres diferents. En el gràfic de l'esquerra, tot i que l'escissió és diferent de zero per a tot $c > 0$, veiem que únicament per a $c > 0.2$ comença a ser visible. Per tal de veure el que succeeix per a valors de c petits, en el gràfic de dalt a la dreta representem $\log(\sigma)$ contra $\log(c)$. Cal tenir en compte que, ja per a $c = 0.05$, el valor de $\sigma(c)$ és menor que 10^{-15} i, per tant, *negligible en qualsevol aplicació pràctica*.

Sigui $\lambda(c)$ el valor propi dominant del punt fix hiperbòlic que, per a F_c , és igual a $1 + c + \sqrt{2c + c^2}$. Un paràmetre essencial en l'estudi teòric del problema és $h(c) = \log(\lambda(c))$, ja que, usant representacions adequades de les varietats, és possible veure que l'escissió admet cotes superiors de la forma $\exp(-\eta/h)$, on η està relacionat amb la part imaginària de la singularitat de la separatriu del flux límit, com s'ha esmentat a la secció 3. Aquest tipus de resultat és cert per a *APM analítiques generals properes a l'aplicació identitat* [7, 8]. De fet, per al problema present es pot demostrar un resultat més precís. L'angle d'escissió té la forma

$$\sigma(c) = \frac{9}{2} \times 10^6 \pi^2 h(c)^{-8} \exp\left(-\frac{2\pi^2}{h(c)}\right) \times \Omega(h), \quad (7)$$

on el terme $\Omega(h)$ s'anomena *factor corrector* i inclou l'efecte dels termes no dominants (és a dir, ni la part exponencialment petita ni les potències de $h(c)$). Típicament es demostra que aquest terme es pot acotar per una constant més un terme $\mathcal{O}(h(c))$.

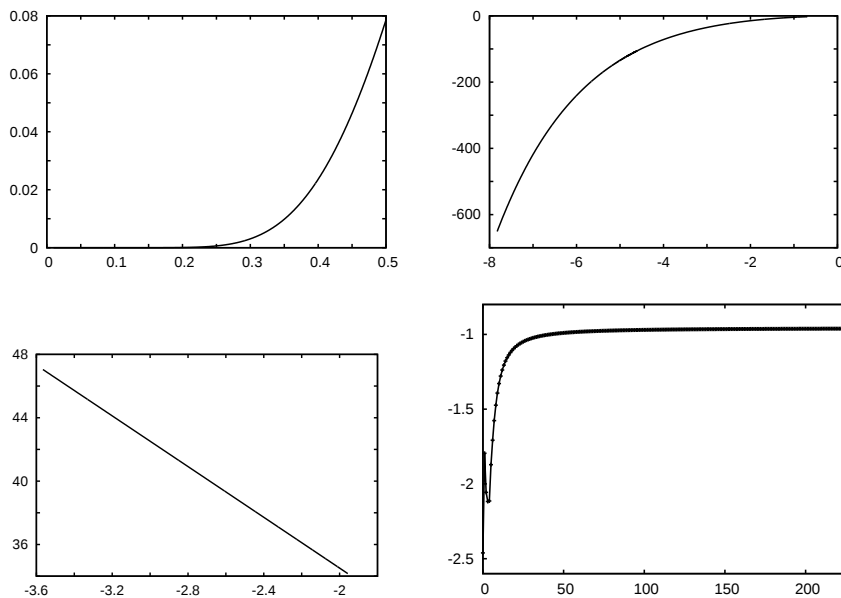


FIGURA 14: A dalt: Diferents representacions de l'angle d'escissió $\sigma(c)$ entre les varietats en la primera intersecció amb $\gamma = 0$, $x > 1$. A l'esquerra: σ en funció de c , mostrant que σ sembla negligible per a $c < 0.2$. A la dreta: $\log(\sigma)$ en funció de $\log(c)$, que permet veure com és de petit $\sigma(c)$ quan c tendeix a zero. A baix a l'esquerra: $\log(\sigma) + 2\pi^2/\log(\lambda(c))$ com a funció de $\log(\log(\lambda(c)))$, mostrant una dependència gairebé lineal amb pendent -8 , d'acord amb la teoria. A baix a la dreta: els valors de $\log_{10}(\omega_{2m}(2\pi^2)^{2m}/(2m+6)!)$ en funció de m , per tal de donar una evidència del caràcter Gevrey de $\Omega(h)$.

El gràfic de baix a l'esquerra de la figura 14 il·lustra les propietats de (7). Aquí la variable de l'eix horitzontal és $\log(h(c))$ mentre que en l'eix vertical es representa $\log(\sigma(c)) + 2\pi^2/h(c)$. D'acord amb (7), el que es representa hauria de ser (si menyspreem el terme $\mathcal{O}(h)$ en la cota de $\Omega(h)$; vegeu el paràgraf següent) una recta amb pendent -8 , que concorda perfectament amb les dades. El fet que calculem valors bastant petits de $\sigma(c)$ no és pas un problema. El paquet PARI/GP [3] és útil per a aquests problemes senzills.

En el cas de l'aplicació d'Hénon, en la formulació present, s'observa experimentalment que el terme $\Omega(h)$ es pot desenvolupar en potències de h^2 : $\Omega(h) = \sum_{m \geq 0} \omega_{2m} h^{2m}$. El terme constant i els primers termes del desenvolupament de $\Omega(h)$ poden ésser determinats numèricament (vegeu-ne els mètodes

a [10, 30]) de manera acurada (fins i tot amb milers de xifres correctes) i els primers dígit de ω_0 són 2.489 312 802 936 71. No obstant això, la sèrie que defineix $\Omega(h)$ és *divergent*, però ens proporciona una bona aproximació per a cada valor de h si es trunca la suma en el lloc correcte. Hi ha evidència numèrica que la sèrie és de *classe Gevrey-1*, és a dir, tot i ser divergent, la sèrie associada $\sum_{m \geq 0} \omega_m h^{2m} / (2m)!$ és convergent. El gràfic de sota a la dreta de la figura 14 mostra aquesta evidència. De la determinació numèrica de $\Omega(h)$ per a diferents valors de h es poden obtenir els coeficients ω_{2m} . A la figura representem $\log_{10}(\omega_{2m} (2\pi^2)^{2m} / (2m+6)!)$ en funció de m , que sembla que tendeix a una constant.

Aquest caràcter Gevrey també s'ha d'esperar en la *majoria de les construccions formals de fluxos* en les quals l'aplicació temps-1 aproxima una APM donada (o fins i tot una aplicació general) propera a la identitat.

Per explicar la *generació de caos* degut a l'existència de punts homoclínics transversals, tornem un moment a la figura 5. És clar que entre les illes de període 5 hi ha una òrbita periòdica hiperbòlica del mateix període. Substituint F_c per F_c^5 els punts de l'òrbita periòdica es converteixen en punts fixos. Si ens fixem en una de les illes, per exemple la que està més a l'esquerra, i en les varietats dels punts fixos del voltant, veiem que l'estructura és similar a la de l'espai de fase d'un *pèndol*, però ara les separatrïus *no coincideixen*: la varietat estable i la inestable s'intersequen transversalment en l'eix $y = 0$. Es pot veure que aquesta situació és topològicament equivalent al *patró de figura vuit* mostrat a l'esquerra de la figura 15 [35]. Es poden veure les petites oscil·lacions de les branques de W^u al voltant de W^s a prop de p i viceversa. Notem que el patró mostrat en la figura 15 no el trobarem en l'aplicació de Hénon, sinó en altres famílies, com l'*aplicació de Duffing conservativa* o alguna representació de l'*aplicació estàndard*.

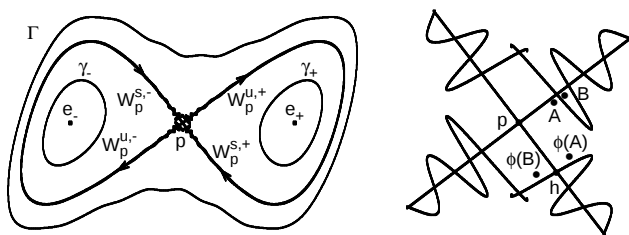


FIGURA 15: A l'esquerra: un punt fix hiperbòlic p de la mena que les seves varietats generen dues voltes (o una volta de la figura vuit). També es mostren dos punts fixos el·líptics, e_+ i e_- , juntament amb les corbes invariants al voltant d'aquests, γ_+ i γ_- , i una corba invariant externa Γ . A la dreta: detall del retorn dels punts A i B a un entorn de p , com $\Phi(A)$ i $\Phi(B)$, que permet entendre l'origen del caos. Vegeu el text per als detalls.

El gràfic de la dreta és una ampliació del de l'esquerra. Considerem dos punts com són A i B , propers a $W^{u,+}$ però en costats diferents de $W^{s,+}$. Poden estar tan propers com es vulgui. Després de diverses iteracions, diguem-ne m , i definint

$\Phi = F^m$, els punts retornen a prop de p com $\Phi(A)$ i $\Phi(B)$. Com que estan en costats diferents de $W^{s,+}$ els iterats successius del punt $\Phi(A)$ es mouran *cap a la dreta* i els de $\Phi(B)$ es mouran *cap a l'esquerra*. El sistema té *sensitivitat respecte les condicions inicials*. Aquest procés es repeteix cada vegada que els iterats del punt tornen a prop de p . De fet, donada una seqüència biinfinita de símbols ℓ (left) i r (right), de la forma $\{\dots, \ell, \ell, r, r, r, \ell, r, \ell, r, \dots\}$, es pot demostrar que hi ha punts que realitzen aquesta seqüència en els passatges successius a prop de p . És a dir, la dinàmica és *impredictible*. El sistema és *determinista* però mostra *dinàmica caòtica*.

6 El mecanisme de destrucció de corbes invariants i els conjunts de Cantor associats

Tal com s'ha comentat a la secció 4, si el número de rotació és massa proper a un racional (en sentit diofàntic) o si la condició twist és massa dèbil o si la pertorbació respecte d'una aplicació integrable és massa gran, la corba invariant *no existeix*. Aquestes propietats analítiques tenen alhora una *interpretació geomètrica*. Abans d'entrar en els detalls es proposa veure l'animació *movie2* a <http://www.maia.ub.es/dsg/QuadraticAPM>, que proporciona una evidència de la *destrucció de les corbes invariants* que envolten les illes de període 6, 5 i 4, quan c augmenta. Els punts en vermell de les imatges es troben sobre corbes invariants, mentre que els punts en verd tenen dinàmica caòtica. Notem que aquests últims estan *confinats* si hi ha una *corba invariant que els envolti*. Quan aquesta corba es destrueix els iterats dels punts *s'escapen*.

Per tal d'il·lustrar el mecanisme que comporta la *destrucció* de les corbes invariants, considerem la figura 16. S'ha generat per a $c = 0.63$ i mostra la part esquerra del conjunt de punts que tenen òrbites acotades. El cas de la figura 16 és similar al de la figura 5, però ara les illes principals són de període 6. En negre representem dues cadenes d'illes amb número de rotació $3/19$ i $4/25$. Considerem les òrbites periòdiques hiperbòliques associades, la de període $4/25$ és visible sobre l'eix de les x i els dos punts simètrics de l'òrbita hiperbòlica de número de rotació $3/19$ estan a prop de $x = -0.2$, fora de l'eix de les x . Les varietats d'aquestes òrbites periòdiques donen lloc a *connexions heteroclíniques*, de la manera com es descriu en la llegenda.

Aquestes connexions heteroclíniques són *obstruccions* per a l'existència de les corbes invariants que podrien separar les cadenes d'illes. En realitat, si considerem una corba formada per un tros de la varietat invariant des del punt periòdic hiperbòlic interior (el que té període 25) fins al punt heteroclínic, seguit del tros de la varietat invariant del punt periòdic hiperbòlic extern (el de període 19), des del punt heteroclínic fins al punt periòdic, les corbes invariants *hauran de creuar-la*. Això és *impossible a causa de la invariància*. De fet, es conclou que no poden existir corbes invariants amb número de rotació en l'interval $(3/19, 4/25)$. Així, el mecanisme geomètric responsable de la destrucció és l'existència de connexions heteroclíniques que obstrueixen les possibles corbes [21, 23].

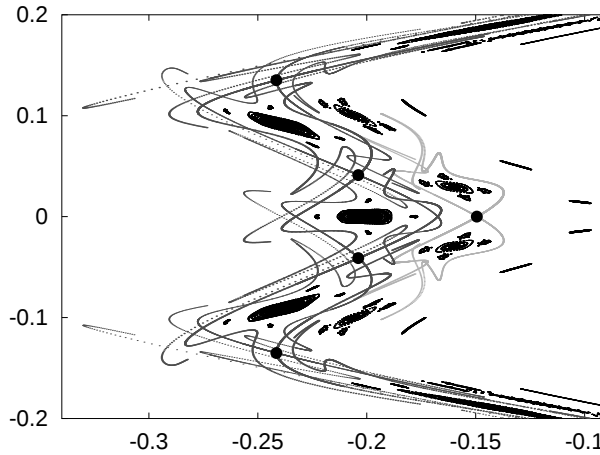


FIGURA 16: Una il·lustració del mecanisme de destrucció de corbes invariants per a $c = 0.63$. En negre: part de les dues cadenes d'illes de períodes 19 (la que interseca $y = 0$) i 25. En gris clar i en traç gruixut i prim es mostren les varietats estable i inestable, W_{25}^s i W_{25}^u , respectivament, d'una òrbita periòdica hiperbòlica de període 25. En gris fosc i traç gruixut i prim les varietats estable i inestable, W_{19}^s i W_{19}^u , respectivament, d'una òrbita periòdica hiperbòlica de període 19. Noteu que W_{25}^u i W_{19}^s (i, simètricament, W_{25}^s i W_{19}^u) tenen punts heteroclínics transversals. Això representa una obstrucció per a l'existència de les corbes invariants que podrien separar les cadenes d'illes. Vegeu els detalls en el text.

No és necessari que una connexió heteroclínica sigui transversal per impedir l'existència de corbes invariants. És suficient tenir *contacte tangencial*, és a dir, que les varietats estable i inestable relacionades siguin tangents. És bastant comú que, variant els paràmetres, dues varietats que estaven allunyades comencin a acostar-se fins que són tangents i, després, esdevinguin transversals, amb la qual cosa es creen punts homoclínics o heteroclínics. Algunes òrbites periòdiques es poden crear *prop de la tangència* i, en particular, poden ser de tipus el·líptic i donar lloc a illes periòdiques. De nou, el model per entendre el comportament prop de la tangència és l'aplicació d'Hénon. Un examen detallat del procés revela que, per a aplicacions analítiques, els punts homoclínics ja existien abans de la tangència, però pertanyien a l'*espai de fase complex*. Això comporta considerar l'aplicació d'Hénon (o d'altres aplicacions analítiques) no a $\mathbb{R}^2$ sinó a $\mathbb{C}^2$. En el moment de tangència, aquests punts simplement *aterren als reals* [15].

Com es comentarà a la secció 8, per a $c \approx 0.6204$ ja no hi ha corbes invariants envoltant les illes de període 6. En particular, s'han destruït les corbes entre les illes de període 19 i 25 de la figura 16. Però només comencem a veure connexions heteroclíniques en la figura per a $c = 0.63$. Gràfics semblants per a $c = 0.625$ o $c = 0.628$, per exemple, no evidencien l'existència de punts heteroclínics. Les raons d'això són simples:

- a) La longitud d'arc de les varietats de la figura 16 és curta. Si es representen parts similars de les varietats per a $c = 0.628$, la varietat en traç gris clar gruixut no toca la de traç gris fosc i prim, ni la varietat en gris clar i prim no toca la representada en traç gris fosc gruixut (a causa de la simetria). Però parts més llargues de les varietats s'intersequen. En particular, hi ha arcs de la varietat invariant que s'escapen a l'infinit (per iteració de F_c per a W^u i de F_c^{-1} per a W^s).
- b) Entre les cadenes d'illes mostrades a la figura 16 hi ha moltes altres òrbites periòdiques hiperbòliques (de fet, una infinitat). Així és possible trobar una *cadena de connexions heteroclíniques* entre algunes d'aquestes òrbites, que proporciona l'obstrucció desitjada. Al seu torn això implica l'existència de connexions heteroclíniques entre les òrbites de períodes 19 i 25.

Sigui com sigui, hi ha objectes invariants amb número de rotació en l'interval mencionat prèviament. S'ha demostrat que aquests objectes estan *fora* de les varietats de l'òrbita periòdica hiperbòlica amb $\rho = 4/25$ i *dins* de les varietats de l'òrbita periòdica hiperbòlica amb $\rho = 3/19$. Les connexions heteroclíniques d'aquestes varietats creen *forats* que *hi impedeixen l'existència de punts de l'objecte invariant*. Com a conseqüència d'això, aquest objecte és un *conjunt de Cantor* [17, 18, 22] i està demostrat que té *mesura zero*.

Per tant, els punts amb dinàmica caòtica que estaven confinats quan la corba invariant encara existia, es poden escapar quan la corba ha estat destruïda i és substituïda per un conjunt de Cantor. No obstant això, si els forats d'aquest conjunt són relativament petits, serà necessari un *temps llarg* perquè els iterats trobin la manera d'escapar-se. Això es veurà en la secció 8.

7 Mesurant la quantitat de caos: exponents de Lyapunov i entropia

Per estudiar les propietats d'estabilitat lineal d'un punt fix o d'un punt en una òrbita periòdica de període k , que denotarem z^* , per una aplicació F , cal calcular simplement $DF(z^*)$ o $DF^k(z^*)$ i mirar els valors propis, tal com s'ha descrit a la secció 1. La qüestió és com procedir per a *òrbites generals*, com les que tenim en el cas de punts en corbes invariants o amb dinàmica caòtica.

La idea bàsica és fer servir la *mitjana de la taxa de creixement de la distància* entre els punts de l'òrbita i els d'una òrbita arbitràriament propera [5]. En general, podem considerar que l'aplicació F actua en una varietat Σ . Sigui $z \in \Sigma$ un punt inicial i ξ un vector en l'espai tangent a Σ en z : $T_z\Sigma$. A més, suposem que ξ té norma igual a 1. Aleshores calculem $DF^m(z)(\xi)$ i mirem la taxa de creixement del logaritme de la norma per tal de definir el número

$$\Lambda(z, \xi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log |DF^m(z)(\xi)|, \quad (8)$$

que es coneix per *l'exponent de Lyapunov* de z en la direcció de ξ . S'ha demostrat que el límit existeix per a gairebé tot $\xi \in T_z\Sigma$ i per a gairebé tot $z \in \Sigma$. El valor

màxim de $\Lambda(z, \xi)$ quan ξ varia en el fibrat tangent unitari a $T_z\Sigma$ es coneix per *l'exponent de Lyapunov maximal* del punt x : $\Lambda(z)$. Per a gairebé tot $\xi \in T_z\Sigma$ es té convergència cap a $\Lambda(z)$.

Per obtenir una estimació de $\Lambda(z)$ s'han de reescalar els vectors $DF^m(z)(\xi)$ (altrament la norma podria créixer massa) i usar diferents estratègies per tal de poder confiar en l'estimació [31, 16]. Per a òrbites en una corba invariant amb ρ irracional (aquestes òrbites són denses) el valor de $\Lambda(z)$ és zero, mentre que les òrbites amb dinàmica caòtica donen, genèricament, valors positius de $\Lambda(z)$. Hi ha òrbites caòtiques que donen $\Lambda(z) = 0$, però són bastant excepcionals [9].

Tornant a l'APM quadràtica F_c , hem calculat l'exponent de Lyapunov maximal per a molts valors de c i una xarxa fina de punts. Una separació típica en les coordenades x i y en la xarxa és 0.0005. En molts dels casos primer calculem un transitori de 10^6 iterats abans de començar a calcular $\Lambda(z)$. D'aquesta manera detectem molts dels punts que s'escapen. S'ha utilitzat també un valor de $m = 10^6$ a (8) per obtenir una estimació de $\Lambda(z)$. Si el valor obtingut és menor que 2×10^{-5} , l'òrbita de z és considerada regular. Altrament, és considerada caòtica. En aquest últim cas, continuem fent iteracions addicionals (fins a un total de 10^8 i en alguns casos fins a 10^{10}) per comprovar si podem considerar el caos confinat o si l'òrbita de z finalment s'escapa. Alguns resultats s'il·lustren en la secció 8.

Una indicació global de les propietats regulars o caòtiques del sistema ens la dóna *l'entropia mètrica* $h_m(F)$. Hi ha diverses maneres equivalents de definir-la, però la més simple d'implementar és la integral de l'exponent de Lyapunov en el conjunt d'òrbites acotades; vegeu [16]. Ens diu com és de *caòtica* l'aplicació *globalment*.

8 Canvis en la mesura del conjunt de punts que no s'escapen

El gràfic de la *mesura* $\mu(c)$ del conjunt *d'òrbites acotades* en funció de c per l'aplicació F_c , donada per (4), és bastant instructiu. Cal destacar que hi ha molts altres models conservatius més generals (p. ex. sistemes hamiltonians amb 2 o 3 graus de llibertat, com el problema restringit de tres cossos, o ones viatgeres d'algunes EDP, com el sistema de Michelson [32, 6]) que tenen *moltes característiques en comú* amb les que usem per a il·lustrar el cas de l'aplicació d'Hénon conservativa.

A més, per a APM en una varietat 2D, cada vegada que es produeix una tangència homoclínica (és a dir, per a algun punt fix o òrbita periòdica, W^u i W^s tenen tangència) un estudi local prop de la tangència proporciona aplicacions similars a la d'Hénon amb propietats globals semblants, tal com s'ha esmentat a la secció 6.

A la figura 17 es representa la mesura $\mu(c)$ del conjunt d'òrbites acotades en funció de c , i una ampliació d'aquesta figura. Noteu els decreixements bruscos de la mesura per a alguns valors de c . De dreta a esquerra, es pot veure un primer decreixement prop de $c = 1.5$. Per a aquest valor del paràmetre el punt el·líptic té valors propis $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$ i és (dèbilment) inestable. *No existeixen*

corbes invariants que l'envolten. L'àrea petita confinada per a $c = 1.5$ és deguda a l'existència d'illes diminutes de període 3. A continuació veiem una seqüència de canvis bruscos de $\mu(c)$ que corresponen a la destrucció de totes les corbes invariants que envolten les illes de períodes 4, 5, 6, etc.

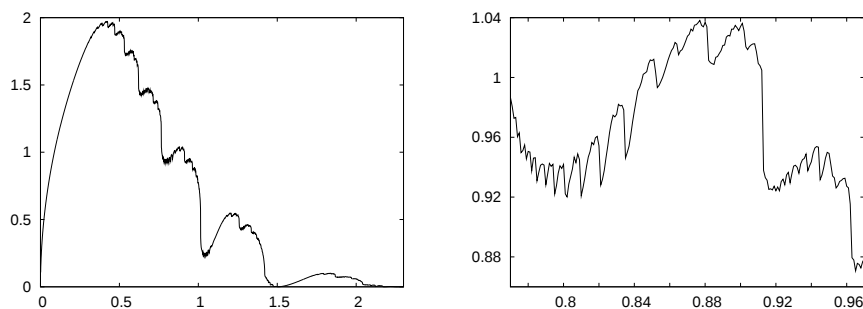


FIGURA 17: A l'esquerra: mesura $\mu(c)$ del conjunt de punts confinats en funció de c . A la dreta: una ampliació en el rang $c \in [0.77, 0.97]$ per donar evidència de les propietats d'autosimilitud d'aquesta mesura.

L'ampliació que es mostra a la dreta de la figura 17 dóna una forta evidència del que passa a les illes de període més alt i il·lustra les propietats d'autosimilitud de $\mu(c)$. Per exemple, el gran salt a prop de $c = 0.91$ es correspon al trencament de les corbes invariants que envolten les illes de número de rotació $2/9$ (compareu-ho amb el domini superior gris fosc de la figura 7), mentre que el salt que s'observa poc després de $c = 0.96$ correspon al trencament de les corbes invariants que envolten les illes de número de rotació $3/13$. No és difícil identificar tots els salts que es veuen en aquestes gràfiques. Com que hi ha salts de $\mu(c)$ per a cada petit canvi de c , es té una evidència que és una funció totalment discontinua.

Es proposa fer un cop d'ull a la *movie3* que trobareu a <http://www.maia.ub.es/dsg/QuadraticAPM> per veure els canvis no només de la mesura, sinó també de la forma del conjunt d'òrbites acotades.

Entre els punts amb òrbita acotada n'hi ha, no obstant això, alguns que mostren un comportament caòtic. L'exponent de Lyapunov ens permet detectar-los. Una qüestió natural és, per tant, saber com varia la mesura d'aquest conjunt respecte al valor de c . Aquesta variació s'il·lustra en la figura 18. El gràfic mostra un canvi bastant brusc en el comportament. Calia esperar això atesa la infinitud de cadenes d'illes en el sistema (n'hi ha per a cada $\rho \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/2]$). Cada cadena d'illes té una òrbita periòdica hiperbòlica associada que genera una certa quantitat de caos, el qual està confinat fins que les corbes invariants que envolten aquestes òrbites caòtiques es destrueixen. Tot i que els càlculs que s'il·lustren en la figura 18 han estat realitzats amb un pas de 10^{-3} en c , una exploració detallada de les dades ens permet detectar alguns centenars de pics.

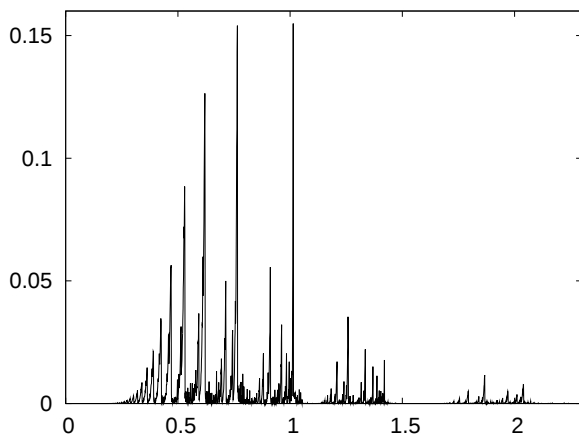


FIGURA 18: Mesura del conjunt de punts confinats amb dinàmica caòtica en funció de c .

A la figura 19 se'n mostren tres ampliacions. Es corresponen amb el que passa després del trencament de les corbes invariants que envolten les illes de període 6, 5 i 4, respectivament. Per ara, no considerem els petits salts d'aquestes corbes, només una mena de mitjana. El gràfic de l'esquerra és conseqüència del canvi de mida de la zona caòtica creada pels punts homoclínics associats a l'òrbita periòdica hiperbòlica de període 6. Però aquesta òrbita neix per a $c = 0.5$. Així doncs, per què costa tant veure que la mida d'aquesta zona és rellevant? La resposta és similar a la discussió de la secció 5 sobre el canvi de la mida de l'angle d'escissió $\sigma(c)$ en funció de c . En aquest sentit, també ens referim a la figura 14, especialment al gràfic de dalt a l'esquerra.

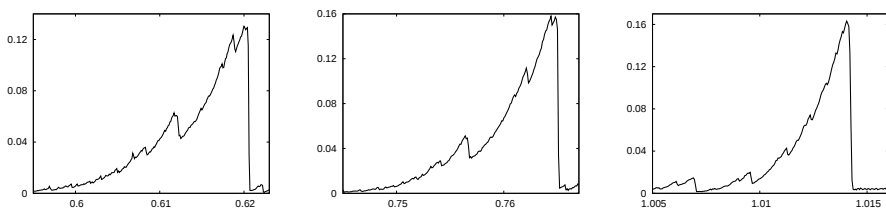


FIGURA 19: Ampliació de la figura 18 corresponent al trencament de les corbes invariants que envolten les illes de període 6 (esquerra), període 5 (centre) i període 4 (dreta).

Allí ens vam adonar que el canvi en c des del començament de l'existència d'un angle d'escissió no nul fins que aquest comença a ser visible era, com a mínim, igual a 0.2. A la figura 19, esquerra, la situació és similar. Tot i que

l'escissió de les varietats de les òrbites de període 6 comença a $c = 0.5$, només per a valors de c propers a 0.6 es torna visible. En els gràfics del centre i de la dreta de la figura 19 la situació és bastant similar. Volem destacar únicament que l'òrbita periòdica hiperbòlica de període 5 s'ha creat en $c = 1 - \cos(2\pi/5) \approx 0.690983$ i que la de període 4 s'ha creat en $c = 1$. Així, en aquests dos casos l'evolució de l'escissió respecte de c és més ràpida.

El salt que es veu en el gràfic de l'esquerra poc després de $c = 0.61$ es correspon exactament amb el mateix tipus de fenomen, però causat per l'òrbita periòdica de número de rotació $\rho = 3/19$. La mesura de la zona caòtica associada a aquesta òrbita periòdica s'ha d'afegir, d'alguna manera, a la zona caòtica més gran deguda a l'òrbita de període 6.

En el domini on es fa evident l'existència de caos es poden trobar illes diminutes. Una prova d'aquest fet usant arguments analítics i geomètrics es pot trobar a [33].

Un altre punt que volem il·lustrar és *com n'és de ràpid*, en funció de c , l'escapament dels punts d'una zona caòtica quan les corbes invariants que l'envolten s'han trencat. Sigui $c_{p/q}$ el *valor crític* per al qual es produeix el trencament de les corbes invariants envoltant les illes de número de rotació $\rho = p/q$. Aleshores, quan $c > c_{p/q}$, els punts de la zona caòtica associada es poden escapar. Però és clar que si $\Delta c = c - c_{p/q}$ és petit, els forats en els conjunts de Cantor que envolten la zona caòtica són *estrets* i serà necessari, per terme mitjà, un *nombre gran d'iterats* per tal que es produeixi l'escapament.

La figura 20 mostra exemples en aquest sentit. Els valors crítics aproximats per a les òrbites periòdiques de la figura són $c_{1/6} \approx 0.6204$, $c_{1/5} \approx 0.7649$ i $c_{1/4} \approx 1.0141$. Analitzem, per exemple, el gràfic de l'esquerra. Per a un valor com $c = 0.625$, la fracció de punts que romanen després de 10^5 iterats és relativament gran enfront d'aquells que ho fan després de 10^6 iterats. De fet, d'acord amb la figura, un 8 % més gran (corba en gris clar). Si ens fixem en aquells que romanen després de 10^6 iterats i els comparem amb aquells que ho fan després de 10^7 iterats, l'excés és de l'1 % aproximadament (corba grisa). Finalment, la mesura dels punts que romanen després de 10^7 iterats en comparació amb aquells que romanen després de 10^8 iterats és quasi negligible (corba negra). Això vol dir que una gran part dels punts en *òrbites caòtiques no confinades* s'escapen després de 10^6 iterats i n'hi ha molt pocs que requereixen més de 10^8 iterats per fer-ho.

Els valors canvien quan estudiem diversos valors de c . Per a un valor com $c = 0.63$ la majoria de punts ja s'escapen per 10^5 iterats, mentre que per a $c = 0.621$ gairebé no hi ha punts que s'escapin abans de 10^7 iterats i la majoria requereixen 10^8 iterats o més.

Si tornem a la figura 17 o 18, veurem que els salts són instantanis: o bé existeixen corbes invariants circumdants i no hi ha possibilitat d'escapament o bé no n'existeixen i tots els punts de la zona caòtica relacionada s'escapen. Notem, però, que les simulacions es duen a terme amb un nombre finit d'iteracions (que, com s'ha dit, varia entre 10^8 i 10^{10} iterats, depenent de la figura). Els resultats per a diferents períodes mostrats en els gràfics del centre i de

l'esquerra de la figura 20 són bastant similars. El mateix comportament s'ha d'esperar en la majoria de casos.

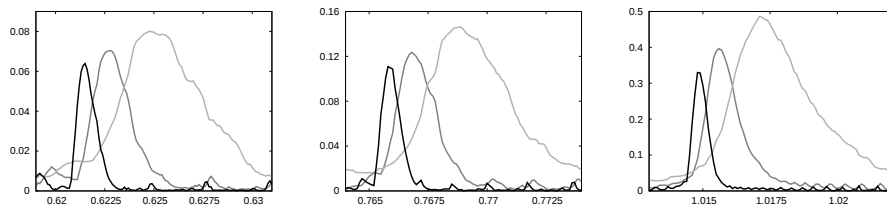


FIGURA 20: D'esquerra a dreta es mostren els resultats relatius a l'escapament de punts després de la destrucció de les corbes que confinen al voltant de les illes de períodes 6, 5 i 4, respectivament. Si M_n denota el conjunt de punts amb dinàmica caòtica que no s'han escapat després de n iterats, les corbes en gris clar, gris i negre mostren l'excés relatiu $M_{10^5}/M_{10^6} - 1$, $M_{10^6}/M_{10^7} - 1$ i $M_{10^7}/M_{10^8} - 1$, respectivament.

9 Alguns problemes oberts

El que sabem actualment sobre la dinàmica d'APM quadràtiques, i també sobre APM més generals, permet una comprensió bastant completa dels diferents tipus de comportament, els mecanismes geomètrics i les estimacions analítiques.

Tot i això encara hi ha alguns problemes clàssics que *romanen oberts*. A continuació en mencionem alguns, els quals són *lluny de ser elementals* i han resistit diversos intents fins ara.

- a) Les APM quadràtiques són un cas especial de les anomenades *aplicacions de Cremona*. Aquestes són aplicacions polinomials en qualsevol dimensió: $z \rightarrow T(z) \in \mathbb{R}^m$, on totes les components de T són polinomials amb grau maximal n . Suposem que el jacobí de T és constant: $\det(DT(z)) = a$, per a tot $z \in \mathbb{R}^m$, amb $a \neq 0$ un número real. No és restrictiu suposar que $a = 1$, altrament componem T amb una aplicació lineal adequada. L'anomenada *conjectura jacobiana* planteja la qüestió següent: és cert que l'aplicació inversa T^{-1} és també una aplicació polinomial? El grau de T^{-1} no ha de ser necessàriament el mateix que el grau de T .

Sabem que, per a aplicacions de Cremona quadràtiques, la resposta és sí, i la inversa també és quadràtica. Això és conseqüència del format de l'equació (4) i de l'existència del reversor S per a APM quadràtiques, que implica que la inversa de F_c és conjugada de F_c .

Aquesta conjectura ha estat demostrada per a grau 2 i hi ha resultats que redueixen el problema a demostrar-la en qualsevol dimensió per a aplicacions polinomials de grau 3. Hi ha altres resultats que fan referència a alguns casos especials, però el problema general resta obert.

- b) Hem vist que les òrbites periòdiques tenen un paper destacat en l'organització de la dinàmica d'APM quadràtiques i el mateix és cert per a APM generals.

Una antiga conjectura deguda a *Poincaré* és: considereu el conjunt d'òrbites acotades d'una APM. És cert que les òrbites periòdiques són denses en aquest conjunt?

- c) En les seccions 7 i 8 hem parlat de la mesura del conjunt de punts amb exponent de Lyapunov positiu i també de l'entropia mètrica, com a la integral de l'exponent de Lyapunov maximal. Tot i l'evidència numèrica hi ha una qüestió bàsica que resta oberta, que és coneguda amb el nom de *conjectura d'entropia mètrica positiva*. És l'entropia mètrica d'una APM no integrable estrictament positiva?

Una qüestió equivalent pot ser expressada de la manera següent. Considereu la varietat invariant estable o la inestable d'un punt fix o periòdic z^* . És la mesura de Lebesgue de la clausura d'aquesta varietat estrictament positiva?

- d) En la secció 4 s'han fet alguns comentaris sobre els nombres diofàntics i les propietats *òptimes* de la proporció àuria g . Les (C, τ) -DC es poden expressar com $|qy - p| > C/q^{\tau-1}$ per a qualsevol $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, $q \neq 0$.

Passem a *dimensió superior*. Siguin $n > 1$ i $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$. Diem que el vector ω satisfà una (C, τ) -DC si $|\sum_{i=1}^n \omega_i k_i - k_0| > C/(||k||_2)^{\tau-1}$, per a qualsevol $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, on $||k||_2$ és la norma euclidiana, que suposem positiva, i per a tot $k_0 \in \mathbb{Z}$.

Per a $n > 1$ donat, quin és el vector *òptim*, en el mateix sentit que hem usat per a g ?

Un altre problema bastant general apareix en les perspectives de la secció següent.

10 Perspectives i conclusions

Les aplicacions quadràtiques que preserven l'àrea, tot i ser la primera extensió del cas lineal a ser considerada, mostren una *dinàmica extremament rica*.

Les eines analítiques, geomètriques i topològiques ens permeten tenir una *bona comprensió de la dinàmica* i trobar explicacions per a (quasi) tots els fets numèricament observats.

Alguns aspectes requereixen encara una combinació d'eines analítiques i numèriques, com ara la predicció de quan es trencaran les diferents corbes invariants o bé la predicció de propietats estadístiques globals.

A més, l'estudi del cas quadràtic pot ser considerat un *paradigma* que es pot usar per descriure les propietats d'APM més generals.

Una pregunta clau és què succeeix quan *augmentem la dimensió*. Les *aplicacions simplèctiques* són generalitzacions naturals d'APM en varietats de dimensió parell (diguem dimensió $2n$). Suposem que usem coordenades locals $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ i considerem la 2-forma

$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + \dots + dx_n \wedge dy_n$. Una aplicació simplèctica és una transformació que preserva ω . És clar que si $n = 1$ la forma no és res més que l'element d'àrea. Aquestes transformacions apareixen de manera natural com a aplicacions de Poincaré en sistemes hamiltonians amb $n + 1$ graus de llibertat.

Què es pot dir de la dinàmica de les aplicacions simplèctiques? Hi ha diversos resultats parcials, com ara l'existència de tors invariants n -dimensionals (que generalitzen les corbes invariants que trobem en APM). Resultats semblants han estat demostrats per als sistemes hamiltonians propers a un sistema integrable, un tema estudiat per la *teoria KAM* (vegeu, per exemple, [2]). L'últim problema obert dels mencionats abans està relacionat amb les propietats del tor invariant *més persistent*. Però, fins i tot per al cas $n = 2$, encara no es disposa d'una bona descripció de les propietats globals de la dinàmica. Això podria ser un bon tema d'investigació per als propers anys.

Agraïments

La recerca de l'autor ha estat finançada al llarg dels anys per subvencions europees, espanyoles i catalanes. L'autor agraeix profundament la contribució de múltiples col·laboradors a l'hora de clarificar diversos temes. En particular, N. Miguel i A. Vieiro, amb qui col·labora en la mateixa àrea d'estudi. S'han usat les facilitats computacionals del Grup de Sistemes Dinàmics de la Universitat de Barcelona per a les il·lustracions numèriques presentades en aquestes notes. Es vol agrair també el treball eficient de J. Timoneda com a administrador del clúster.

Referències

- [1] ARNOLD, V. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Moscou: Éditions Mir, 1976. [Traduït del rus per Djilali Embarek]
- [2] ARNOLD, V. I.; AVEZ, A. *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*. París: Gauthier-Villars, 1967. (Monographies Internationales de Mathématiques Modernes; 9)
- [3] BATUT, C.; BELABAS, K.; BERNARDI, D.; COHEN, H.; OLIVIER, M. *Users' guide to PARI/GP*. <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>.
- [4] BROER, H.; ROUSSARIE, R.; SIMÓ, C. «Invariant circles in the Bogdanov-Takens bifurcation for diffeomorphisms». *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16 (6) (1996), 1147–1172.
- [5] CINCOTTA, P. M.; GIORDANO, C. M.; SIMÓ, C. «Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits». *Phys. D*, 182 (3–4) (2003), 151–178.
- [6] DUMORTIER, F.; IBÁÑEZ, S.; KOKUBU, H.; SIMÓ, C. «About the unfolding of a Hopf-zero singularity». *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33 (10) (2013), 4435–4471.
- [7] FONTICH, E.; SIMÓ, C. «Invariant manifolds for near identity differentiable maps and splitting of separatrices». *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10 (2) (1990), 319–346.

- [8] FONTICH, E.; SIMÓ, C. «The splitting of separatrices for analytic diffeomorphisms». *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10 (2) (1990), 295–318.
- [9] GARRIDO, L.; SIMÓ, C. «Some ideas about strange attractors». A: *Dynamical systems and chaos*. Berlín; Nova York: Springer, 1983, 1–28. (Lecture Notes in Phys.; 179)
- [10] GELFREICH, V.; SIMÓ, C. «High-precision computations of divergent asymptotic series and homoclinic phenomena». *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 10 (2–3) (2008), 511–536.
- [11] GÓMEZ, G.; MONDELO, J. M.; SIMÓ, C. «A collocation method for the numerical Fourier analysis of quasi-periodic functions. I. Numerical tests and examples». *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 14 (1) (2010), 41–74.
- [12] GÓMEZ, G.; MONDELO, J. M.; SIMÓ, C. «A collocation method for the numerical Fourier analysis of quasi-periodic functions. II. Analytical error estimates». *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 14 (1) (2010), 75–109.
- [13] HÉNON, M. «Numerical study of quadratic area-preserving mappings». *Quart. Appl. Math.*, 27 (1969), 291–312.
- [14] HÉNON, M. «A two-dimensional mapping with a strange attractor». *Comm. Math. Phys.*, 50 (1) (1976), 69–77.
- [15] LAZUTKIN, V. F.; SIMÓ, C. «Homoclinic orbits in the complex domain». *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 7 (2) (1997), 253–274.
- [16] LEDRAPPIER, F.; SHUB, M.; SIMÓ, C.; WILKINSON, A. «Random versus deterministic exponents in a rich family of diffeomorphisms». *J. Statist. Phys.*, 113 (1–2) (2003), 85–149.
- [17] MATHER, J. N. «Minimal measures». *Comment. Math. Helv.*, 64 (3) (1989), 375–394.
- [18] MATHER, J. N. «Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems». *Math. Z.*, 207 (2) (1991), 169–207.
- [19] MIGUEL, N.; SIMÓ, C.; VIEIRO, A. «From the Hénon conservative map to the Chirikov standard map for large parameter values». *Regul. Chaotic Dyn.*, 18 (5) (2013), 469–489.
- [20] NEĬSHTADT, A. I. «The separation of motions in systems with rapidly rotating phase». *J. Appl. Math. Mech.*, 48 (2) (1984), 133–139 (1985). [Traduït del rus de *Prikl. Mat. Mekh.*, 48 (2) (1984), 197–204]
- [21] OLVERA, A.; SIMÓ, C. «An obstruction method for the destruction of invariant curves». *Phys. D*, 26 (1–3) (1987), 181–192.
- [22] OLVERA, A.; SIMÓ, C. «The dynamics near invariant Cantorian sets of perturbed twist maps». A: VELARDE, M. G. (ed). *Synergetics, order and chaos*. Teaneck, Nova Jersey: World Sci. Publ., 1988, 698–705.
- [23] OLVERA, A.; SIMÓ, C. «Elliptic non-Birkhoff periodic orbits in the twist maps». *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 3 (1) (1993), 165–185.

- [24] SÁNCHEZ, J.; NET, M.; SIMÓ, C. «Computation of invariant tori by Newton-Krylov methods in large-scale dissipative systems». *Phys. D*, 239 (3-4) (2010), 123-133.
- [25] SIEGEL, C. L.; MOSER, J. K. *Lectures on celestial mechanics*. Nova York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1971. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 187)
- [26] SIMÓ, C. «An overall view on conservative maps of the plane». A: ALSINA, C. *et al.* (ed). *European Conference on Iteration Theory*. Teaneck, Nova Jersey: World Sci. Publ., 1989, 56-73.
- [27] SIMÓ, C. «Analytical and numerical computation of invariant manifolds». A: BENEST, D.; FROESCHLÉ, C. (ed). *Modern methods in celestial mechanics*. Gif-sur-Yvette: Editions Frontières, 1990, 285-330.
- [28] SIMÓ, C. «Averaging under fast quasiperiodic forcing». A: *Hamiltonian mechanics*. Nova York: Plenum, 1994, 13-34. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys.; 331)
- [29] SIMÓ, C. «Invariant curves of analytic perturbed nontwist area preserving maps». *Regul. Chaotic Dyn.*, 3 (3) (1998), 180-195.
- [30] SIMÓ, C. «Analytical and numerical detection of exponentially small phenomena». A: *Proceedings of the conference, Equadiff '99*. Singapur: World Scientific, 2000, 967-976.
- [31] SIMÓ, C. «Global dynamics and fast indicators». A. *Global analysis of dynamical systems*. Bristol: Inst. Phys., 2001, 373-389.
- [32] SIMÓ, C. «Some properties of the global behaviour of conservative low-dimensional systems». A: *Foundations of computational mathematics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009, 162-189. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; 363)
- [33] SIMÓ, C.; TRESCHÉV, D. «Stability islands in the vicinity of separatrices of near-integrable symplectic maps». *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 10 (2-3) (2008), 681-698.
- [34] SIMÓ, C.; VIEIRO, A. «Resonant zones, inner and outer splittings in generic and low order resonances of area preserving maps». *Nonlinearity*, 22 (5) (2009), 1191-1245.
- [35] SIMÓ, C.; VIEIRO, A. «Dynamics in chaotic zones of area preserving maps: close to separatrix and global instability zones». *Phys. D*, 240 (8) (2011), 732-753.

English summaries

Álvaro Corral and Francesc Font-Clos

Criticality and self-organization in branching processes: application to natural hazards

The statistics of natural catastrophes contains very counter-intuitive results. Using earthquakes as a working example, we show that the energy radiated by such events follows a power-law or Pareto distribution. This means, in theory, that the expected value of the energy is infinite, and in practice, that the mean of a finite set of data is not representative of the full population.

Also, the distribution presents scale invariance, which implies that it is not possible to define a characteristic scale for the energy. A simple model to account for this peculiar statistics is a branching process: the activation or slip of a fault segment can trigger other segments to slip, with a certain probability, and so on.

Although not recognized initially by seismologists, this is a particular case of the stochastic process studied by Galton and Watson one hundred years in advance, in order to model the extinction of (prominent) families. Using the formalism of probability generating functions we will be able to derive the main properties of these models.

Remarkably, a power-law distribution of energies is only recovered in a very special case, when the branching process is at the onset of attenuation and intensification, i.e., at criticality. In order to account for this fact, we introduce the self-organized critical models, in which, by means of some feedback mechanism, the critical state becomes an attractor in the evolution of such systems. Along the text, analogies with basic statistical physics concepts are drawn.

The bulk of the material presented here is self-contained, with the exception of some basic concepts in Theory of Probability.

Keywords: branching process, Galton–Watson model, criticality, self-organization, power laws, Gutenberg–Richter law.

MSC2010 Subject Classification: 60J80, 60J85.

Mercè Romero-Gómez, Patricia Sánchez-Martín, and Josep J. Masdemont

How invariant manifolds form spirals and rings in barred galaxies

The spectacularity of barred galaxies resides not only in the presence of their bars, extended in the center of the galaxy, but also in the rings and spiral arms developed in the exterior regions. There is no clear theory on the rings formation and, until recently, there was only one explaining the origin of spiral arms in non-barred galaxies. In recent years, and based on dynamical systems, we have developed a theory that relates rings and spiral arms with hyperbolic invariant manifolds associated with periodic and quasiperiodic orbits about the collinear points of the system.

Keywords: dynamical systems, invariant manifolds, galaxy structure, galactic dynamics.

MSC2010 Subject Classification: 37D10, 85A05.

Carles Simó

Quadratic area preserving maps in $\mathbb{R}^2$

I consider the description, explanation and prediction of the properties of the orbits of a given system as one of the main goals of Dynamical Systems. In this lecture we focus on the quadratic Area Preserving Maps (APM) in $\mathbb{R}^2$. There are several reasons for this choice. It is a paradigmatic model. Many problems concerning: the existence of invariant curves diffeomorphic to a circle; the role of invariant manifolds of hyperbolic fixed or periodic points and how they lead to the existence of chaos; the geometrical mechanisms leading to the destruction of invariant curves; and quantitative measures of different properties for general APM, can all be understood thanks to our knowledge of the quadratic case. A review of these topics is presented in the lecture. Several open questions and extensions are shown at the end of the lecture.

Keywords: quadratic area preserving maps, invariant curves, invariant manifolds, chaos, quantitative measures.

MSC2010 Subject Classification: 37E30, 37A05, 37E40, 37C29.

Instruccions per als autors

Els articles sotmesos a publicació s'han d'enviar als editors o a qualsevol membre del comitè editorial, per correu electrònic, preferentment en format PDF. Els originals han de contenir la versió anglesa del títol, un resum breu en català i en anglès, paraules clau en català i en anglès i els codis de la classificació per matèries MSC2010.

Les versions definitives dels articles acceptats s'han de presentar en codi $\text{\TeX}$, preferentment en l'estil $\text{\LaTeX}$ propi del BUTLLETÍ. Aquest estil es pot obtenir a les pàgines web de la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM). Per tal d'accelerar el procés de producció, es prega als autors que segueixin les indicacions contingudes en el document d'exemple.

La versió en paper del Butlletí s'imprimeix en blanc i negre. Quan un article contingui figures en color i es consideri convenient, l'autor proporcionarà una versió dels gràfics substituint el color per tons de grisos i línies de gruix variable. Així mateix modificarà els comentaris que facin referència al color de les figures. En qualsevol cas el Butlletí publicarà l'original en color en el seu format electrònic.

Els autors dels articles publicats al BUTLLETÍ en retenen el dret de còpia (*copyright*) i autoritzen l'IEC a difondre'ls, tant a través de la publicació impresa com mitjançant els portals digitals propis o d'altres amb què s'estableixin els convenis oportuns a aquest efecte. És responsabilitat dels autors assegurar que es disposa dels drets de reproducció dels gràfics i de les figures que hi apareguin. Cada autor rebrà una còpia en PDF d'alta qualitat de la versió digital del seu article i un exemplar imprès del número del BUTLLETÍ en el qual es publiqui.

La correspondència administrativa relacionada amb el BUTLLETÍ s'ha d'adreçar a la SCM.

Comitè editorial

Julia Cufí (editor en cap)
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
jcufi@mat.uab.cat

Bartomeu Coll
Dep. de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de les Illes Balears
tomeu.coll@uib.cat

Núria Fagella
Dep. de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
fagella@maia.ub.es

Josep Maria Font
Dep. de Probabilitats, Lògica i Estadística
Universitat de Barcelona
jmfont@ub.edu

Armengol Gasull
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
gasull@mat.uab.cat

Gábor Lugosi
ICREA i Departament d'Economia
Universitat Pompeu Fabra
gabor.lugosi@upf.edu

Rosa Camps (editora adjunta)
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
rcamps@mat.uab.cat

Jorge Mateu
Departament de Matemàtiques
Universitat Jaume I
mateu@mat.uji.es

Marc Noy
Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya
marc.noy@upc.edu

Francesc Planas
Departament de Matemàtica Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya
francesc.planas@upc.edu

Agustí Reventós
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
agusti@mat.uab.cat

Marta Sanz-Solé
Dep. de Probabilitats, Lògica i Estadística
Universitat de Barcelona
marta.sanz@ub.edu



Societat Catalana de Matemàtiques

La **Societat Catalana de Matemàtiques (SCM)** és una societat filial de l'Institut d'Estudis Catalans, que continua les activitats de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències, que fou fundada per l'Institut l'any 1931. Les finalitats de la **SCM** són: el conreu de les ciències matemàtiques, l'extensió del seu coneixement en la societat catalana, el foment del seu ensenyament i de la seva investigació teòrica i aplicada, així com la publicació de tota mena de treballs que s'adeqüin a aquests objectius. La **SCM** desenvolupa les seves activitats en les terres de llengua i cultura catalanes. El català és, doncs, la llengua pròpia de la **SCM** i la que és usada normalment en tots els seus actes i publicacions.

La **SCM** edita les publicacions periòdiques *SCM/Notícies* i *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*. Els socis de la **SCM** reben, gratuïtament, aquestes dues publicacions.

La **SCM** té convenis de reciprocitat amb diverses societats matemàtiques d'arreu del món, mitjançant els quals els socis de la **SCM** obtenen una reducció en la quota de soci d'aquestes societats. Així mateix, els socis de la **SCM** poden fer-se socis de la Societat Matemàtica Europea pagant una quota complementària.

La Junta Directiva de la **SCM** està constituïda per les persones següents:

PRESIDENT: Joan de Solà-Morales

VICEPRESIDENT: Joaquim Ortega-Cerdà

SECRETARI: Albert Ruiz i Cirera

TRESORERA: Mariona Petit i Vilà

VOCALS: Núria Fagella i Rabionet, Josep Grané i Manlleu, Agustí Reventós i Tarrida, Carles Romero i Chesa, Oriol Serra i Albó, Esther Silberstein, Manel Udina i Abelló, Enric Ventura i Capell

DELEGAT DE L'IEC: Joan Girbau i Badó

L'adreça de la **SCM** és carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona. Telèfon: 933 248 583. Fax: 932 701 180. Correu electrònic: scm@iec.cat. Adreça web: <http://scm.iec.cat>.

El Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques publica, en llengua catalana, exposicions matemàtiques de qualitat, que puguin interessar a un nombre elevat de lectors. Es donarà prioritat a aquells treballs en què destaquin la claredat d'exposició i l'interès general del tema. El Butlletí està obert a tots els camps de la matemàtica i també als aspectes matemàtics de les ciències experimentals, la tecnologia, l'economia, etc., així com a altres àrees, com la història, la didàctica i la filosofia, sempre que els treballs tinguin un component matemàtic important. També tenen cabuda al Butlletí aquells articles que desenvolupin un aspecte significatiu de la problemàtica de la professió matemàtica al nostre país.

El Butlletí publica un volum a l'any, dividit en dos números, que es trameten gratuïtament a tots els socis. El Butlletí es publica també en format electrònic. L'edició electrònica del Butlletí pot obtenir-se des del portal de revistes científiques en línia de l'IEC o al servidor <http://scm.iec.cat>.

La correspondència administrativa s'ha d'adreçar a la Societat Catalana de Matemàtiques.

Editor en cap _____

Julia Cufí

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Editora adjunta _____

Rosa Camps

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Comitè editorial _____

Bartomeu Coll

Dep. de Matemàtiques i Informàtica

Universitat de les Illes Balears

Jorge Mateu

Departament de Matemàtiques

Universitat Jaume I

Núria Fagella

Dep. de Matemàtica Aplicada i Anàlisi

Universitat de Barcelona

Marc Noy

Departament de Matemàtica Aplicada II

Universitat Politècnica de Catalunya

Josep Maria Font

Dep. de Probabilitats, Lògica i Estadística

Universitat de Barcelona

Francesc Planas

Departament de Matemàtica Aplicada I

Universitat Politècnica de Catalunya

Armengol Gasull

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Agustí Reventós

Departament de Matemàtiques

Universitat Autònoma de Barcelona

Gábor Lugosi

ICREA i Departament d'Economia

Universitat Pompeu Fabra

Marta Sanz-Solé

Dep. de Probabilitats, Lògica i Estadística

Universitat de Barcelona

Societat Catalana de Matemàtiques

Carrer del Carme, 47 - 08001 Barcelona

tel. 933 248 583 - fax 932 701 180

scm@iec.cat - <http://scm.iec.cat>